Книгоиздательство инженера П. К. ШМУЛЕВИЧА.
Отдѣлъ I. По каталогу № 3.

ДОПОЛНЕНІЯ

КЪ КУРСУ АЛГЕБРЫ,

ТРЕБУЕМЫЯ ПРОГРАММАМИ КОНКУРСНЫХЪ ЭКЗАМЕНОВЪ.

СОСТАВИЛЪ
П. К. Шмулевичъ,
ИНЖЕНЕРЪ ПУТЕЙ СООБЩЕНІЯ.

Изданіе десятое.

Цѣна 2 р. 25 к.; съ пер. 2 р. 55 к.

СКЛАДЪ ИЗДАНІЯ У АВТОРА:
Петроградъ, Ивановская, д. 6. Телефонъ 436—85.
1917.

Книгоиздательство инженера П. К. ШМУЛЕВИЧА.
Отдѣлъ I. По каталогу № 3.

ДОПОЛНЕНІЯ

КЪ КУРСУ АЛГЕБРЫ,

ТРЕБУЕМЫЯ ПРОГРАММАМИ КОНКУРСНЫХЪ ЭКЗАМЕНОВЪ.

СОСТАВИЛЪ
П. К. Шмулевичъ,
ИНЖЕНЕРЪ ПУТЕЙ СООБЩЕНІЯ.

Изданіе десятое.

Цѣна 2 р. 25 к.; съ пер. 2 р. 55 к.

СКЛАДЪ ИЗДАНІЯ У АВТОРА:
Петроградъ, Ивановская, д. 6. Телефонъ 436—85.
1917.

Типографія „Двигатель" Казначейская, 6. Тел. 578-58

ДОПОЛНЕНІЯ КЪ КУРСУ

АЛГЕБРЫ,

ТРЕБУЕМЫЯ ПРОГРАММАМИ КОНКУРСНЫХЪ ЭКЗАМЕНОВЪ.

Предисловіе къ десятому изданію.

Настоящее изданіе „Дополненій къ курсу Алгебры“ отличается отъ предыдущихъ въ слѣдующемъ:

1) Во многихъ мѣстахъ прибавлены примѣры, наглядно иллюстрирующіе теорію; таковы, напр., §§ 70, 88*a*, 89*a*, 92*a* и друг.

2) Упрощены и улучшены доказательства теоремъ о равносильности уравненій §§ 123—136.

3) Прибавлено нѣсколько новыхъ вопросовъ, не имѣющихся въ прежнихъ изданіяхъ, каковы, напр.: изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшенія двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, случай однородности двухъ уравненій, извлеченіе квадратнаго корня изъ комплексныхъ чиселъ и другіе.

Нѣкоторые изъ этихъ вопросовъ, не требующіеся программами, но изрѣдка спрашиваемые въ различныхъ институтахъ, отпечатаны мелкимъ шрифтомъ.

Такъ какъ книга эта введена въ употребленіе, какъ учебникъ, во многихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, то чтобы не измѣнить нумерацію параграфовъ и не вводить связанныхъ съ этимъ неудобствъ для преподавателей и учащихся, всѣ вновь прибавленные параграфы отмѣчены буквой *a*. Такимъ образомъ, появились, напр., § 22*a*, § 26*a* и т. д.

Благодаря этому, нумерація параграфовъ курса нисколько не измѣнилась, что дастъ возможность учащимся одного класса пользоваться различными изданіями книги, хотя вслѣдствіе сказанныхъ прибавленій объемъ ея увеличился съ 208 до 256 страницъ.

Въ настоящемъ видѣ „Дополненія къ курсу Алгебры" даютъ полный и подробный отвѣтъ не только на всѣ статьи, помѣщенныя въ программѣ и не имѣющіяся въ общепринятыхъ учебникахъ Киселева, Давидова и др., но здѣсь разобраны даже тѣ вопросы, которые, хотя и не помѣщены въ программѣ, но предлагаются на экзаменахъ.

Надѣюсь, что въ теперешнемъ видѣ книга эта вполнѣ удовлетворитъ самымъ строгимъ требованіямъ, какія можно предъявлять къ подобнаго рода изданіямъ.

Считаю пріятнымъ долгомъ принести сердечную благодарность всѣмъ тѣмъ преподавателямъ, которые, проходя въ старшихъ классахъ Алгебру при помощи этого учебника, указывали мнѣ на измѣненія и улучшенія, желательныя въ послѣдующихъ изданіяхъ. Всѣ эти пожеланія были, по возможности, приняты въ настоящемъ изданіи. Надѣюсь и впредь получать подобныя же указанія и не премину ими воспользоваться.

Въ виду совершенно невѣроятнаго вздорожанія бумаги (на 400 % и выше) и типографскихъ работъ (болѣе чѣмъ на 100%) стоимость книги повышена съ 1 р. 50 к. до 2 руб. 25 коп. Надѣюсь, что ко времени выхода слѣдующаго изданія г. г. бумажные фабриканты и торговцы будутъ сокращены и окажется возможнымъ вернуться къ прежней цѣнѣ.

П. Шмулевичъ.

Сентябрь 1916 года.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГЛАВА I.

Нѣкоторыя предложенія о дѣлимости многочленовъ.

1. ТЕОРЕМА. Остатокъ отъ дѣленія раціональнаго многочлена, цѣлаго относительно буквы x *) и расположеннаго по убывающимъ степенямъ этой буквы, на двучленнаго дѣлителя $x-a$, равенъ значенію даннаго многочлена, при $x=a$.

Доказательство. Всякій цѣлый относительно буквы x многочленъ, расположенный по убывающимъ степенямъ главной буквы, имѣетъ видъ:

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots\ldots + A_3x^3 + \\ + A_2x^2 + A_1x + A_0.$$

Здѣсь m—какое-нибудь *цѣлое* и *положительное* число, а

$$A_m,\ A_{m-1},\ A_{m-2}\ \ldots\ A_3,\ A_2,\ A_1,\ A_0$$

нѣкоторые *коэффиціенты*, т. е. выраженія цѣлыя или дробныя, не содержащія буквы x (въ частномъ случаѣ нѣкоторые изъ этихъ коэффиціентовъ могутъ быть равными нулю). Напр., многочленъ

$$3x^2 - 4x^3 + 8x^6 - 12x + 3$$

по расположеніи его по убывающимъ степенямъ буквы x принимаетъ видъ:

$$8x^6 + 0x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 12x + 3,$$

---

*) Многочленъ называется *цѣлымъ* относительно какой нибудь буквы, если эта буква не входитъ въ знаменатель ни одного изъ его членовъ. Таково, напр., выраженіе $\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{7}x^2 + 5$. Многочленъ же $2x^2 - \frac{7}{x-2} + 5$ не будетъ цѣлымъ относительно x.

и слѣд., здѣсь

$$m=6;\ A_6=8;\ A_5=0;\ A_4=0;\ A_3=-4;\ A_2=3;$$
$$A_1=-12;\ A_0=3.$$

Если такой многочленъ раздѣлить на двучленъ $x-a$, то въ частномъ получится цѣлый относительно буквы x и расположенный по убывающимъ степенямъ x многочленъ m минусъ первой степени, который назовемъ Q_x, и нѣкоторый остатокъ R, не содержащій буквы x, такъ какъ въ дѣлитель x входитъ только въ первой степени, а степень остатка всегда ниже степени дѣлителя. Припоминая, что дѣлимое всегда равно дѣлителю, умноженному на частное, плюсъ остатокъ, имѣемъ *тождество*:

$$A_m x^m + A_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots \ldots + A_1 x + A_0 =$$
$$= (x-a).\ Q_x + R \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{I}).$$

Такъ какъ обѣ части выраженія (I) представляютъ величины, равныя между собой *тождественно*, т. е. при всякихъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ него, то, очевидно, оно будетъ справедливо и въ томъ частномъ случаѣ, если мы положимъ $x=a$; тогда первая часть равенства (I) приметъ видъ:

$$A_m a^m + A_{m-1} a^{m-1} + \ldots + A_2\, a^2 + A_1\, a + A_0$$

и слѣд., не будетъ содержать буквы x, ибо въ коэффиціенты

$$A_m,\ A_{m-1},\ \ldots A_1,\ A_0$$

x не входитъ; вторая же часть тождества (I) приметъ видъ суммы:

$$(a-a).\ Q_a + R.$$

Но первое слагаемое этой суммы равно нулю, такъ какъ Q_a не можетъ равняться безконечности *), а слѣд., во

---

*) Всякое произведеніе вида $O\,.\,m$ равно нулю, если только m не есть безконечность, въ каковомъ случаѣ получается неопредѣленность, требующая раскрытія. Въ произведеніи $(a-a).\ Q_a$ первый множитель есть нуль, второй множитель Q_a есть результатъ подстановки буквы a вмѣсто x въ цѣлый относительно x многочленъ Q_x. Но многочленъ, *цѣлый относительно* x, можетъ обратиться въ безконечность только при подстановкѣ ∞ вмѣсто x. Всякая же подстановка вмѣсто x конечнаго числа, напр. a, обратить Q_x въ безконечность не можетъ. Поэтому $Q_a \neq \infty$, и слѣд., $(a-a).\ Q_a=0$.

второй части останется только R, которое не измѣнится отъ произведенной подстановки, такъ какъ оно не содержитъ буквы x. Итакъ, при $x=a$ мы вмѣсто тождества (I) получаемъ:

$$A_m a^m + A_{m-1} a^{m-1} + \ldots + A_2 a^2 + A_1 a + A_0 = R,$$

а это и показываетъ, что искомый остатокъ R равенъ значенію даннаго многочлена при x, равномъ a.

2. *Замѣчаніе I.* Если двучленный дѣлитель имѣетъ видъ $x+a$, то этотъ случай легко приводится къ предыдущему, если замѣтимъ, что $x+a$ можно представить въ видѣ разности $x-(-a)$.

Замѣчаніе II. При помощи такого же пріема доказательства, легко убѣдиться въ томъ, что остатокъ отъ раздѣленія цѣлаго относительно буквы x многочлена на двучленъ, вида

$$ax \pm b,$$

равенъ результату подстановки въ данный многочленъ значенія $\left(\mp \frac{b}{a}\right)$ вмѣсто x.

3. ПРИМѢРЫ. I. Найти остатокъ отъ раздѣленія многочлена

$$3x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 4x - 1$$

на $x-2$.

Подставляя въ данный многочленъ 2 вмѣсто x, находимъ искомый остатокъ:

$$R = 3 \cdot 2^4 - 7 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = -21.$$

II. Найти остатокъ отъ раздѣленія

$$10x^6 + 4x^3 + 5x - 1$$

на $x+3$.

Подставляя (-3) вмѣсто x, получаемъ искомый остатокъ:

$$R = 10 \cdot (-3)^6 + 4 \cdot (-3)^3 + 5 \cdot (-3) - 1 = 7166.$$

III. Найти остатокъ отъ раздѣленія

$$x^3-3x^2+2x-1$$

на $2x-3$.

Подставляя $\frac{3}{2}$ вмѣсто x въ данный многочленъ, получаемъ остатокъ:

$$R=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3.\left(\frac{3}{2}\right)^2+2.\left(\frac{3}{2}\right)-1=-\frac{11}{8}.$$

IV. Найти остатокъ отъ раздѣленія многочлена

$$3x^4-5x^2+6x+4$$

на двучленъ $2x+1$.

Подставляя $\left(-\frac{1}{2}\right)$ вмѣсто x, получаемъ:

$$R=3.\left(-\frac{1}{2}\right)^4-5.\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6.\left(-\frac{1}{2}\right)+4=-\frac{1}{16}.$$

4. Изъ доказанной въ § 1 теоремы, вытекаютъ такія слѣдствія:

Слѣдствіе I. Если многочленъ обращается въ нуль отъ замѣны въ немъ буквы x буквой a, то онъ дѣлится безъ остатка на $x-a$.

Слѣдствіе II, обратное предыдущему. Если многочленъ дѣлится на $x-a$, то результатъ подстановки въ него буквы a вмѣсто x равенъ нулю.

Слѣдствіе I выражаетъ собой *условіе, достаточное* для дѣлимости многочлена, цѣлаго относительно буквы x, на двучленъ $x-a$; слѣдствіе же II представляетъ *необходимое* условіе этой дѣлимости. Оба эти слѣдствія въ совокупности даютъ намъ:

*1. Для того, чтобы цѣлый относительно x многочленъ дѣлился на двучленъ $x-a$, необходимо и достаточно, чтобы число a было корнемъ *) этого многочлена.*

---

*) *Корнемъ многочлена* называется то значеніе главной буквы его, при которомъ многочленъ дѣлается равнымъ нулю.

2. Для того, чтобы число a было корнемъ цѣлаго относительно x многочлена, необходимо и достаточно, чтобы многочленъ этотъ дѣлился на двучленъ $x-a$.

5. ТЕОРЕМА. Если цѣлый относительно буквы x многочленъ дѣлится порознь на двучленныхъ дѣлителей

$$x-a,\ x-b,\ x-c, \ldots\ldots$$

гдѣ a, b, c, ... не равны, то онъ дѣлится и на ихъ произведенiе.

Доказательство. Пусть данный многочленъ будетъ

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0;$$

обозначимъ его для краткости P_x. Этотъ многочленъ по условiю дѣлится на $x-a$, на $x-b$, на $x-c$ ...., а слѣд., на основанiи § 4 каждое изъ выраженiй

$$P_a = A_m a^m + A_{m-1}a^{m-1} + \ldots\ldots + A_1a + A_0$$
$$P_b = A_m b^m + A_{m-1}b^{m-1} + \ldots\ldots + A_1b + A_0$$
$$P_c = A_m c^m + A_{m-1}c^{m-1} + \ldots\ldots + A_1c + A_0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

равно нулю.

Пусть частное отъ дѣленiя P_x на $x-a$ будетъ Q_x; здѣсь Q_x есть также цѣлый относительно x многочленъ степени $(m-1)$; слѣд., имѣемъ тождество:

$$P_x = (x-a) \cdot Q_x. \qquad \text{(I)}.$$

Если въ этомъ тождествѣ букву x вездѣ замѣнимъ буквой b, то получимъ:

$$P_b = (b-a) \cdot Q_b,$$

гдѣ Q_b означаетъ выраженiе Q_x, въ которомъ буква x замѣнена буквой b. Но P_b, какъ указано выше$=0$, а слѣд.,

$$(b-a) \cdot Q_b = 0.$$

Множитель $(b-a)$ нулю равняться не можетъ, ибо по условiю теоремы a не равно b, слѣд., непремѣнно

$$Q_b = 0.$$

Итакъ, Q_x обращается въ нуль, если вмѣсто буквы x подставить b, а слѣд., на основанiи § 4, заключаемъ, что Q_x дѣлится безъ остатка на $x—b$. Пусть частное отъ этого дѣленiя будетъ T_x, гдѣ T_x, очевидно, цѣлый относительно x полиномъ степени $(m—2)$; тогда имѣемъ тождество:

$$Q_x=(x-b)\,.\,T_x \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad \text{(II)}.$$

Вставляя въ равенство (I) вмѣсто Q_x его величину изъ равенства (II), получимъ новое тождество:

$$P_x=(x-a)(x-b)\,.\,T_x \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad \text{(III)}.$$

Замѣняя здѣсь x буквой c, получимъ въ лѣвой части P_c, что равно нулю, а слѣд.,

$$(c-a)\,.\,(c-b).\;T_c=0,$$

но c не равно a и не равно b по условiю теоремы, а потому

$$T_c=0,$$

т. е., если въ T_x букву x замѣнимъ буквой c, то получается нуль, а слѣд., на основанiи § 4 заключаемъ, что T_x дѣлится безъ остатка на $x—c$. Пусть частное отъ этого дѣленiя будетъ S_x; тогда

$$T_x=(x-c)\,.\,S_x.$$

Вставляя это значенiе T_x въ равенство (III), имѣемъ:

$$P_x=(x-a)\,.\,(x-b)\,.\,(x-c)\,.\,S_x.$$

Такимъ образомъ, теорема доказана.

6. ТЕОРЕМА. Если многочленъ m—овой степени, цѣлый относительно буквы x, имѣетъ m различныхъ двучленныхъ дѣлителей, то частное отъ раздѣленiя его на произведенiе всѣхъ этихъ дѣлителей равно A_m, т. е. коэффицiенту при высшей степени буквы x.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр., многочленъ

$$P_x=A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}+\,.\,.\,.\,.\,.+A_2x^2+A_1x+A_0$$

имѣетъ m различныхъ двучленныхъ дѣлителей:

$$(x-a_1),\;(x-a_2),\;(x-a_3),\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-a_m).$$

Тогда на основанiи предыдущей теоремы мы знаемъ, что онъ раздѣлится безъ остатка и на ихъ произведенiе, т. е. на

$$(x-a_1)\,.\,(x-a_2)\,.\,(x-a_3)\,.\;.\;.\;.\;.\,(x-a_m).$$

Такъ какъ это произведенiе по открытiи скобокъ представляетъ собой многочленъ m-овой степени, т. е. такой же степени, какъ и P_x, то, очевидно, частное отъ этого дѣленiя не можетъ содержать буквы x, а слѣд., оно должно имѣть всего одинъ членъ, который получится отъ раздѣленiя высшаго члена дѣлимаго на высшiй членъ дѣлителя; но высшiй членъ дѣлимаго есть A_mx^m, высшiй членъ дѣлителя x^m, а слѣд., первый, и въ то же время *единственный* членъ частнаго будетъ

$$A_mx^m : x^m = A_m,$$

что и треб. доказать.

7. Слѣдствiе. *Если многочленъ m-овой степени, цѣлый относительно буквы x,*

$$A_mx^m + A_{m-1}x^{m-1} + \;.\;.\;.\;.\;. + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

имѣетъ m различныхъ корней: a_1, a_2, a_3 . . . a_m, то онъ можетъ быть представленъ въ видѣ произведенiя:

$$P_x = A_m(x-a_1)(x-a_2)\;.\;.\;.\;.\;(x-a_{m-1})(x-a_m).$$

Этимъ свойствомъ мы будемъ пользоваться при разложенiи уравненiй на множителей.

Примѣръ. Биквадратное уравненiе

$$4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$$

имѣетъ корни: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{2}$; $x_3 = -2$; $x_4 = -\frac{3}{2}$, и слѣд., лѣвая часть его разлагается на множителей:

$$4\,.\,(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right).$$

8. Законъ составленiя частнаго отъ раздѣленiя цѣлаго относительно буквы x многочлена на двучленъ $x - a$.

Непосредственнымъ дѣленiемъ находимъ первые 3 члена частнаго отъ раздѣленiя

$$A_mx^m + A_{m-1}x^{m-1} + \;.\;.\;.\;.\;. + A_2x^2 + A_1x + A_0 \text{ на } (x-a)$$

$$
\begin{array}{l|l}
A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots + A_2{}^2 x + A_1 x + A_0 & x - a \\
\cline{2-2}
A_m x^m - A_m a x^{m-1} & \left.\begin{array}{r} A_m x^{m-1} + A_m a \\ + A_{m-1} \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^{m-2} + A_m a^2 \\ + A_{m-1} a \\ + A_{m-2} \end{array}\right| x^{m-3} + \ldots
\end{array}
$$

$$
\text{1-ый остатокъ.} \left\{ \begin{array}{l} A_m a \\ A_{m-1} \end{array} \right| x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots + A_1 x + A_0
$$

$$
\left.\begin{array}{r} A_m a \\ + A_{m-1} \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^{m-1} - A_m a^2 \\ - A_{m-1} a \end{array}\right| x^{m-2}
$$

$$
\text{2-ой остатокъ.} \left\{ \begin{array}{r} A_m a^2 \\ + A_{m-1} a \\ + A_{m-2} \end{array} \right| x^{m-2} + A_{m-3}x^{m-3} \ldots A_1 x + A
$$

Замѣчаніе: вертикальная черта замѣняетъ скобки.

Получивъ такимъ образомъ первые 3 члена частнаго, мы можемъ на нихъ подмѣтить слѣдующій **законъ составленія** его:

Частное есть цѣлый относительно буквы x и расположенный по убывающимъ степенямъ x многочленъ степени $m-1$.

Коэффиціентъ перваго члена частнаго равенъ коэффиціенту перваго члена дѣлимаго$=A_m$.

Коэффиціентъ второго члена равенъ произведенію коэф. предшествующаго члена на а, сложенному со вторымъ коэффиціентомъ дѣлимаго:

$$A_m \cdot a + A_{m-1}.$$

Коэффиціентъ третьяго члена частнаго равенъ произведенію предшествующаго коэффиціента на а, сложенному съ третьимъ коэффиціентомъ дѣлимаго:

$$(A_m \cdot a + A_{m-1}) \cdot a + A_{m-2}.$$

Законъ этотъ **общій для всѣхъ членовъ.** Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что непосредственнымъ дѣленіемъ мы нашли въ частномъ какой нибудь членъ Kx^{n-1}; членъ этотъ получился, очевидно, отъ раздѣленія высшаго члена какого то остатка на x, т. е. высшій членъ этого остатка былъ

$$Kx^n,$$

а слѣдовательно, весь соотвѣтствующій остатокъ былъ *):

$$Kx^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots A_2x^2 + A_1x + A_0.$$

Умножая полученный членъ частнаго Kx^{n-1} на дѣлителя и вычитая это произведеніе изъ вышенаписаннаго остатка, получаемъ остатокъ слѣдующаго порядка въ видѣ:

$$(Ka + A_{n-1})x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots + A_1x + A_0.$$

Раздѣливъ высшій членъ этого новаго остатка на высшій членъ дѣлителя, т. е. на x, получимъ слѣдующій по порядку членъ частнаго:

$$(K \cdot a + A_{n-1})x^{n-2}.$$

Коэффиціентъ его равенъ произведенію предшествующаго коэффиціента на а, сложенному съ коэффиціентомъ того же порядка дѣлимаго; а это доказываетъ общность закона составленія коэффиціентовъ.

*) Потому что каждый остатокъ представляетъ многочленъ, убывающій по степенямъ буквы x, причемъ за исключеніемъ перваго члена значки у коэффиціентовъ A соотвѣтственно равны показателямъ степени при x.

Если дѣлимое не представляетъ собой *полнаго* многочлена, т. е. содержитъ *не всѣ* цѣлыя степени x отъ m до **0**, то для приложенія выведеннаго правила слѣдуетъ приписать въ дѣлимомъ недостающіе члены съ коэффиціентами, равными нулю.

9. Замѣчаніе 1. Очевидно, законъ этотъ распространяется и на случай дѣленія на двучленъ $x+a$, ибо

$$x+a=x-(-a).$$

Замѣчаніе 2. Для примѣненія этого правила къ дѣлителю вида $ax\pm b$ надо дѣлить сперва по вышеуказанному закону на $x\pm\frac{b}{a}$, а потомъ всѣ члены частнаго раздѣлить еще на a, такъ какъ

$$ax\pm b=a.\left(x\pm\frac{b}{a}\right),$$

а вмѣсто того, чтобы дѣлить на произведеніе, можно дѣлить порознь на каждаго множителя.

10. ПРИМѢРЫ. 1. Найти частное и остатокъ отъ раздѣленія многочлена

$$3x^4-5x^2+4x+3 \text{ на } x-2.$$

Дополняя данный многочленъ членомъ съ x^3, имѣемъ:

$$3x^4+0x^3-5x^2+4x+3.$$

Коэф.	1-го чл.	частнаго	$=3$,	слѣд.,	1-ый чл.	частнаго	$=3x^3$;
»	2-го »	»	$=3.2+0=6$,	»	2-ой »	»	$=6x^2$;
»	3-го »	»	$=6.2-5=7$,	»	3-ій »	»	$=7x$;
»	4-го »	»	$=7.2+4=18$,	»	4-ый »	»	$=18$.

Искомое частное будетъ:

$$Q_x=3x^3+6x^2+7x+18.$$

Остатокъ отъ дѣленія R будетъ:

$$R=3\ .\ 2^4-5\ .\ 2^2+4\ .\ 2+3=39.$$

2. Найти частное и остатокъ отъ раздѣленія

$$4x^5+2x^4+5x^3-7 \text{ на } 2x+3.$$

Дополняемъ данный многочленъ недостающими членами съ x^2 и съ x и дѣлимъ сперва на $x+\frac{3}{2}$:

$$(4x^5+2x^4+5x^3+0x^2+0x-7):\left(x+\frac{3}{2}\right).$$

Коэф. 1-го чл. частн.$=4$, слѣд., 1-ый чл. частнаго$=4x^4$;

» 2-го » » $=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2=-4$; » 2-ой » » $=-4x^3$;

» 3-го » » $=-4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+5=11$; » 3-ій » » $=11x^2$;

» 4-го » » $=11\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+0=-\frac{33}{2}$; » 4-ый » » $=-\frac{33}{2}x$;

» 5-го » » $=\left(-\frac{33}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+0=\frac{99}{4}$; » 5-ый » » $=\frac{99}{4}$.

Итакъ, частное отъ раздѣленія даннаго многочлена на $x+\frac{3}{2}$ будетъ:

$$4x^4-4x^3+11x^2-\frac{33}{2}x+\frac{99}{4},$$

а для того, чтобы получить частное отъ раздѣленія даннаго многочлена на $2x+3$, надо всѣ найденные коэффиціенты раздѣлить еще на 2. Слѣд., окончательно имѣемъ:

Искомое частное $Q_x=2x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-\frac{33}{4}x+\frac{99}{8}$.

Остатокъ $R=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^5+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^4+5\left(-\frac{3}{2}\right)^3-7=-\frac{353}{8}$.

3. Не производя дѣленія, найти частное и остатокъ отъ раздѣленія $x^2-8x+15$ на $x+5$. *Отв.* $Q_x=x-13$; $R=80$.

4. Не производя дѣленія, найти частное и остатокъ отъ раздѣленія $3x^5-4x^4-2x^2+7$ на $x-2$.

Отв. $Q_x=3x^4+2x^3+4x^2+6x+12$; $R=31$.

5. Не производя дѣленія, найти частное и остатокъ отъ раздѣленія x^3-3x^2+2x-1 на $2x-3$.

Отв. $Q_x=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}$; $R=-\frac{11}{8}$.

11. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДѢЛЕНІЯ. Разсмотримъ случ. и дѣлимости выраженій вида $x^m\pm a^m$ на $x\pm a$.

I. Пусть требуется раздѣлить x^m-a^m на $x-a$.

На основаніи § 1, подставивъ въ дѣлимое вмѣсто буквы x букву a, найдемъ остатокъ отъ дѣленія:

$$R=a^m-a^m=0.$$

Слѣд., **разность** *одинаковыхъ степеней двухъ количествъ* **всегда дѣлится** *безъ остатка* **на разность** *первыхъ степеней этихъ же количествъ.*

Для полученія частнаго, дополняемъ дѣлимое недостающими членами:

$$x^m+0\,.\,x^{m-1}+0\,.\,x^{m-2}+\,.\;.\;.\;.\;0\,.\,x^2+0\,.\,x-a^m.$$

По выведенному выше правилу сокращеннаго дѣленія, первый членъ частнаго равенъ x^{m-1}; второй членъ содержитъ x^{m-2} съ коэф., который найдемъ, если коэф. перваго члена умножимъ на a и прибавимъ коэф. второго члена дѣлимаго (см. § 8), слѣд., получаемъ:

Коэф. 2-го чл.$=1\,.\,a+0=a$, т. е. 2-ой чл.$=ax^{m-2}$,
» 3-го » $=a\,.\,a+0=a^2$, » 3-ій » $=a^2x^{m-3}$,
» 4-го » $=a^2\,.\,a+0=a^3$, » 4-ый » $=a^3x^{m-4}$
. . . .

Послѣдній членъ частнаго равенъ частному отъ раздѣленія послѣдняго члена дѣлимаго на послѣдній членъ дѣлителя, т. е. будетъ a^{m-1}. Итакъ:

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}+\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$.\;.\;+a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

II. Пусть требуется раздѣлить x^m+a^m на $x-a$.

Остатокъ отъ дѣленія будетъ:

$$R=a^m+a^m=2a^m,$$

и слѣд., **сумма** *одинаковыхъ степеней двухъ количествъ* **никогда не дѣлится на разность** *первыхъ степеней тѣхъ же количествъ.*

Если составить частное по общему закону, получимъ:

$$\frac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;+a^{m-2}x+$$
$$+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a}.$$

III. Раздѣлить $x^m - a^m$ на $x+a$.

Подставивъ въ дѣлимое $(-a)$ вмѣсто x, найдемъ остатокъ отъ дѣленія:

$$R=(-a)^m - a^m.$$

При m—четномъ этотъ остатокъ R обращается въ нуль, при m нечетномъ онъ равенъ $(-2a^m)$.

Итакъ, **разность** *одинаковыхъ степеней двухъ количествъ* **дѣлится на сумму** *первыхъ степеней тѣхъ же количествъ* **только при четномъ** *показателѣ степени.*

Частное въ этомъ случаѣ составится по предыдущему и будетъ:

$$\frac{x^m-a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-a^3x^{m-4}+\ldots\ldots$$
$$\ldots+a^{m-2}x-a^{m-1}.$$

IV Раздѣлить x^m+a^m на $x+a$.

Остатокъ отъ дѣленія будетъ:

$$R=(-a)^m+a^m,$$

и слѣд., при m—нечетномъ равенъ нулю, а при m четномъ равенъ $2a^m$.

Итакъ, **сумма** *одинаковыхъ степеней двухъ количествъ* **дѣлится на сумму** *первыхъ степеней тѣхъ же количествъ* **только при нечетномъ** *показателѣ степени.*

Частное имѣетъ видъ:

$$\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots-a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

Замѣчаніе. Слѣдуетъ обратить особое вниманіе на то, что только при дѣленіи на разность всѣ члены частнаго имѣютъ знаки *плюсъ*. При дѣленіи же на сумму знаки *чередуются.*

12. ПРИМѢРЫ. 1. Раздѣлить x^5+1 на $x+1$.

$$\frac{x^5+1}{x+1}=x^4-x^3+x^2-x+1.$$

2. Раздѣлить x^6+1 на x^2+1.

Обозначивъ $x^2=y$, $x^6=y^3$, имѣемъ:

$$\frac{y^3+1}{y+1}=y^2-y+1, \text{ а слѣд. } \frac{x^6+1}{x^2+1}=x^4-x^2+1.$$

3. Раздѣлить $\sqrt[3]{x^{10}}-\sqrt[3]{y^{10}}$ на $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}$.

Пусть $\sqrt[3]{x^2}=m$; $\sqrt[3]{y^2}=n$; тогда $\sqrt[3]{x^{10}}=m^5$; $\sqrt[3]{y^{10}}=n^5$;

$$\frac{m^5-n^5}{m-n}=m^4+m^3n+m^2n^2+mn^3+n^4, \text{ а слѣд.,}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^{10}}-\sqrt[3]{y^{10}}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}=\sqrt[3]{x^8}+\sqrt[3]{x^6y^2}+\sqrt[3]{x^4y^4}+\sqrt[3]{x^2y^6}+\sqrt[3]{y^8}.$$

4. Раздѣлить $x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{8}{5}}$ на $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{5}}$.

Пусть $x^{\frac{1}{3}}=m$; $y^{\frac{2}{5}}=n$; тогда $x^{\frac{4}{3}}=m^4$; $y^{\frac{8}{5}}=n^4$;

$$\frac{m^4-n^4}{m+n}=m^3-m^2n+mn^2-n^3, \text{ а слѣд.,}$$

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{8}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{5}}}=x-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{5}}-y^{\frac{6}{5}}.$$

5. Отъ какого частнаго случая дѣленія могло получиться выраженіе вида $x^{12}-x^9+x^6-x^3+1$.

Пусть $x^3=y$, тогда данное выраженіе перепишется такъ: $y^4-y^3+y^2-y+1$. Такъ какъ знаки здѣсь *чередуются*, то подобное частное могло получиться только отъ дѣленія на *сумму* $(y+1)$, а именно $y^4-y^3+y^2-y+1=\frac{y^5+1}{y+1}$. Подставляя вмѣсто y его значеніе, находимъ: $x^{12}-x^9+x^6-x^3+1=\frac{x^{15}+1}{x^3+1}$.

6. Найти произведеніе многочленовъ:

$$(x^{16}+x^{12}y^4+x^8y^8+x^4y^{12}+y^{16}) \cdot (x^{16}-x^{12}y^4+x^8y^8-x^4y^{12}+y^{16}).$$

Обозначая $x^4=m$ и $y^4=k$, переписываемъ данныя выраженія такъ:

$$(m^4+m^3k+m^2k^2+mk^3+k^4) \cdot (m^4-m^3k+m^2k^2-mk^3+k^4).$$

Или, представляя каждый изъ множителей подъ видомъ частнаго отъ дѣленія, получимъ:

$$\frac{m^5-k^5}{m-k}\cdot\frac{m^5+k^5}{m+k}=\frac{m^{10}-k^{10}}{m^2-k^2}=\frac{x^{40}-y^{40}}{x^8-y^8}.$$

Чтобы выполнить послѣднее дѣленіе, обозначаемъ $x^8=p$ и $y^8=q$. Получаемъ:

$$\frac{x^{40}-y^{40}}{x^8-y^8}=\frac{p^5-q^5}{p-q}=p^4+p^3q+p^2q^2+pq^3+q^4=$$

$$=(x^8)^4+(x^8)^3y^8+(x^8)^2(y^8)^2+x^8(y^8)^3+(y^8)^4=$$

$=x^{32}+x^{24}y^8+x^{16}y^{16}+x^8y^{24}+y^{32}$ . . . . . Это и есть искомое произведеніе данныхъ многочленовъ.

13. ПРИМѢРЫ ПРИЛОЖЕНІЯ ПРЕДЫДУЩИХЪ ТЕОРЕМЪ КЪ РѢШЕНІЮ ЗАДАЧЪ.

I. Опредѣлить, при какомъ значеніи m многочленъ

$$5x^4-2x^2+3x+m$$

раздѣлится безъ остатка на $x+2$?

Рѣшеніе. На основаніи § 1 остатокъ отъ раздѣленія даннаго многочлена на двучленъ $x+2$ будетъ

$$R=5\,.\,(-2)^4-2\,.\,(-2)^2+3\,.\,(-2)+m=66+m.$$

Для того, чтобы этотъ остатокъ былъ равенъ нулю, необходимо и достаточно, чтобы $m=-66$.

II. Опредѣлить, при какомъ значеніи m многочленъ

$$3x^3+mx^2-4x+2$$

при дѣленіи на $3x-2$ даетъ въ остаткѣ 5?

Рѣшеніе. Остатокъ отъ дѣленія даннаго многочлена на $3x-2$ на основаніи § 2 будетъ:

$$R=3.\left(\frac{2}{3}\right)^3+m.\left(\frac{2}{3}\right)^2-4.\left(\frac{2}{3}\right)+2=\frac{2+4m}{9}.$$

Слѣд., для опредѣленія m имѣемъ уравненіе:

$$\frac{2+4m}{9}=5,\text{ откуда } m=\frac{43}{4}.$$

III. Опредѣлить, дѣлится ли многочленъ

$$2x^3+x^2-13x+6$$

на произведеніе $(x+3)(x-2)(2x-1)$?

Рѣшеніе. На основаніи § 5 многочленъ раздѣлится на данное произведеніе трехъ множителей, если онъ дѣлится порознь на каждаго изъ нихъ. Подставляя въ этотъ многочленъ (—3) вмѣсто x, получаемъ:

$$2\,.\,(-3)^3+(-3)^2-13\,.\,(-3)+6=0;$$

слѣд., на $x+3$ онъ дѣлится безъ остатка. Далѣе

$$2\,.\,(2)^3+(2)^2-13\,.\,(2)+6=0;$$

$$2\,.\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2-13\,.\left(\frac{1}{2}\right)+6=0.$$

Слѣд., данный многочленъ дѣлится порознь на $(x+3)$, на $(x-2)$ и на $(2x-1)$, а потому онъ раздѣлится и на ихъ произведеніе, причемъ частное отъ этого дѣленія на основаніи § 6 будетъ равно 2.

IV. Въ многочленѣ

$$ax^4+bx^3+cx^2-61x+30$$

опредѣлить a, b и c такимъ образомъ, чтобы онъ раздѣлился на произведеніе

$$(x-1)(x-2)(x-3).$$

Рѣшеніе. Для нахожденія чиселъ a, b, c, удовлетворяющихъ требуемому условію, надо приравнять нулю остатки отъ раздѣленія порознь даннаго многочлена на $(x-1)$, на $(x-2)$ и на $(x-3)$.

Слѣд., имѣемъ слѣдующія уравненія:

$$R_1=a(1)^4+b(1)^3+c(1)^2-61\,.\,(1)+30=a+b+c-31=0.$$
$$R_2=a(2)^4+b(2)^3+c(2)^2-61\,.\,(2)+30=16a+8b+4c-92=0.$$
$$R_3=a(3)^4+b(3)^3+c(3)^2-61\,.\,(3)+30=81a+27b+9c-153=0.$$

Рѣшая полученныя 3 уравненія съ 3 неизвѣстными:

$$a+b+c=31,$$
$$16a+8b+4c=92,$$
$$81a+27b+9c=153,$$

находимъ

$$a=1;\ b=-11;\ c=41.$$

V. Однимъ изъ важнѣйшихъ примѣненій вышеизложенныхъ теоремъ является **возможность пониженія степени уравненія**, когда тѣмъ или инымъ способомъ найдены одинъ или нѣсколько корней его.

Примѣръ. Рѣшить кубичное ур-іе:

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0,$$

зная, что одинъ изъ корней его равенъ (-1).

На основаніи изложеннаго въ § 4 заключаемъ, что лѣвая часть этого ур-ія дѣлится на $x+1$; выполнивъ дѣленіе, находимъ въ частномъ

$$x^2 - 7x + 12.$$

Слѣдовательно, имѣемъ:

$$x^3-6x^2+5x+12=(x+1)(x^2-7x+12)=0,$$

откуда или $x+1=0$, что даетъ извѣстный уже корень $x_1=$ $=-1$, или же

$$x^2-7x+12=0, \text{ откуда } x_2=3,\ x_3=4.$$

VI. Найти всѣхъ *цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей* многочлена $x^3-4x^2-17x+60$, если таковые существуютъ.

Если цѣлые двучленные дѣлители даннаго многочлена существуютъ, то они имѣютъ видъ $(x \pm a)$, причемъ на основаніи § 4 (слѣдствіе II) результатъ подстановки въ данный многочленъ значенія $(\mp a)$ вмѣсто x долженъ равняться нулю. Кромѣ того, извѣстно, что если многочленъ дѣлится безъ остатка на $x \pm a$, то низшій членъ его (въ данномъ случаѣ 60) долженъ быть кратнымъ a. Но 60 дѣлится на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 слѣд., искомыми цѣлыми двучленными дѣлителями въ данномъ случаѣ могутъ быть только:

$$(x \pm 1);\ (x \pm 2);\ (x \pm 3);\ \ldots\ldots (x \pm 60),$$

а потому посмотримъ, какой изъ дѣлителей числа 60 обратитъ данный многочленъ въ нуль.

Подставляя вмѣсто x единицу, имѣемъ:

$$R=1-4-17+60; \text{ не } = 0.$$

Пробуемъ (-1):

$$R=(-1)^3-4(-1)^2-17(-1)+60;\text{ не }=0.$$

Пробуемъ 2:

$$R=2^3-4\,.\,2^2-17\,.\,2+60;\text{ не }=0.$$

Подставляемъ (-2):

$$R=(-2)^3-4\,.\,(-2)^2-17\,.\,(-2)+60;\text{ не }=0.$$

Подставляемъ 3:

$$R=3^3-4\,.\,3^2-17\,.\,3+60=0.$$

Итакъ, при $x=3$, данный многочленъ обращается въ нуль, а потому однимъ изъ искомыхъ двучленныхъ дѣлителей будетъ $x-3$. Раздѣливъ на $x-3$, получаемъ:

$$x^3-4x^2-17x+60=(x-3)(x^2-x-20).$$

Остается, слѣд., только найти двучленныхъ дѣлителей трехчлена

$$x^2-x-20,$$

что дѣлается очень просто: приравниваемъ его нулю, и находимъ корни ур-iя

$$x^2-x-20=0;\ x_1=5,\ x_2=-4.$$

Слѣд., окончательно искомые двучленные дѣлители будутъ:

$$(x-3)\,;\,(x-5)\,;\,(x+4).$$

Вышеизложенный прiемъ нахожденiя двучленныхъ дѣлителей многочленовъ имѣетъ примѣненiе при рѣшенiи ур-iй, степени выше второй, когда для пониженiя степени уравненiя надо подобрать одинъ или нѣсколько корней его.

13a. ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНIЙ.

1. Не производя дѣленiя, написать *частное и остатокъ* для каждаго изъ слѣдующихъ заданiй:

a) $3x^4-2x^3+5x-1$ на $x-1$, $x+2$, $2x-1$, $3x+2$.

b) $(x^5-ax^4+3a^3x^2+a^5):(x+2a)$.

c) $x^5-3cx^4+5c^2x^3-8c^3x^2+6c^4x-4c^5$ на $x-2c$.

Отвѣты: *a*) При дѣл. на $(x-1)$ ост. $R=5$, $Q_x=3x^3+x^2+x+6$.
При дѣл. на $(x+2)$: $R=53$; $Q_x=3x^3-8x^2+16x-27$.
При дѣл. на $(2x-1)$: $R=\frac{23}{16}$; $Q_x=\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x+\frac{39}{16}$.
При дѣл. на $(3x+2)$: $R=-\frac{85}{27}$; $Q_x=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{23}{27}$.
b) $R=-35a^5$; $Q_x=x^4-3ax^3+6a^2x^2-9a^3x+18a^4$.
c) $R=0$; $Q_x=x^4-cx^3+3c^2x^2-2c^3x+2c^4$.

2. Опредѣлить всѣхъ цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей многочленовъ:

a) a^3-7a+6. *Отв.* $a-1$, $a-2$, $a+3$.
b) $x^3-4x^2-31x+70$. *Отв.* $x-2$, $x+5$, $x-7$.
c) $x^4-x^3-29x^2+9x+180$. *Отв.* $x-3$, $x+3$, $x+4$, $x-5$.
d) $a^3-a^2(b-c+d)+a(bd-bc-cd)+bcd$. *Отв.* $a-b$, $a+c$, $a-d$.

3. Опредѣлить k, чтобы $4x^3-6x+k$ дѣлилось на $x+3$. *Отв.* $k=90$.

4. Опредѣлить a и b, чтобы x^3+ax^2+bx+6 дѣлилось на произведенiе $(x+2)(x+3)$. *Отв.* $a=6$; $b=11$.

5. Доказать, что выраженiе вида $2^{4h+2}+1$, при $h\geqslant 1$, дѣлится на 5.

Рѣшенiе: $2^{4h+2}+1=2^{2(2h+1)}+1=4^{2h+1}+1^{2h+1}$. Такъ какъ сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на сумму ихъ первыхъ степеней, то данное выраженiе дѣлится на $4+1$, т. е. на 5.

6. Доказать, что выраженiе вида $5^{8h+4}+1$, при $h\geqslant 1$, дѣлится на 626.

Указанiе: см. предыдущую задачу.

ГЛАВА II.

1. О НАХОЖДЕНIИ КВАДРАТНЫХЪ КОРНЕЙ СЪ ТОЧНОСТЬЮ ДО ЕДИНИЦЫ ИЗЪ ДАННАГО ЧИСЛА.

14. Опредѣленiе. *Два послѣдовательныя натуральныя* *) *числа* (x) *и* $(x+1)$, *удовлетворяющiя неравенствамъ*

$$x^2\leqslant A<(x+1)^2\ .\ .\ .\ .\ .\ ^{**})$$

---

*) Т. е. цѣлыя и положительныя.

**) Знакъ $\leqslant$ читается *не больше*.

называются квадратными корнями числа A съ точностью до единицы. Число x называется корнемъ съ недостаткомъ, число же $(x+1)$—корнемъ съ избыткомъ.

Напр., если $A=35$, то $x=5$. Если $A=\frac{73}{5}$, то $x=3$. Если $A=\frac{2}{7}$, то $x=0$ и т. д.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ:

Корень квадратный изъ числа A, съ точностью до единицы по недостатку, есть наибольшее цѣлое число, квадратъ котораго не превышаетъ A.

Корень квадратный изъ числа A, съ точностью до единицы по избытку, есть наименьшее цѣлое число, квадратъ котораго превышаетъ A.

15. ТЕОРЕМА I. Корень квадратный, съ точностью до единицы, изъ числа нецѣлаго равенъ корню квадратному, съ точностью до единицы, изъ его цѣлой части.

Доказательство. Пусть N будетъ число нецѣлое, равное $A+\alpha$, гдѣ A—число цѣлое и α правильная дробь; пусть (x) и $(x+1)$ будутъ значенія $\sqrt{N}$ съ точностью до единицы съ недостаткомъ и избыткомъ.

Тогда по опредѣленію § 14 имѣемъ:

$$x^2<A+\alpha<(x+1)^2 \text{ *)}, \text{ или}$$

$$x^2<A+\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1);$$

$$A+\alpha<(x+1)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Изъ (1) имѣемъ:

$$(A-x^2)+\alpha>0.$$

Здѣсь $(A-x^2)$, разность двухъ цѣлыхъ чиселъ, есть число *цѣлое*, α—правильная дробь; слѣд., знакъ суммы $(A-x^2)+\alpha$ зависитъ отъ знака слагаемаго $(A-x^2)$, а потому для возможности существованія такого неравенства разность $(A-x^2)$ не можетъ быть отрицательной, такъ что непремѣнно

$$A-x^2\geqslant 0, \text{ или } x^2\leqslant A \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

---

*) Равенство $x^2=N$ въ этомъ случаѣ, очевидно, невозможно, такъ какъ квадратъ цѣлаго числа x не можетъ равняться нецѣлому числу N.

Изъ (2) имѣемъ, что если

$$A+\alpha<(x+1)^2,$$

гдѣ α—положительное число, то и подавно

$$A<(x+1)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Соединяя полученныя неравенства (3) и (4), имѣемъ:

$$x^2 \leqslant A<(x+1)^2,$$

а это и доказываетъ, что x есть корень квадратный, съ точностью до единицы, изъ числа A, т. е. изъ цѣлой части числа N, что и тр. док.

16. ТЕОРЕМА II. Если данное число превышаетъ 100, то число десятковъ его корня равно корню квадратному, съ точностью до единицы по недостатку, изъ числа его сотенъ.

Доказательство. Всякое число N, превышающее 100, можетъ быть представлено въ видѣ

$$100A+10B+C,$$

гдѣ A—**число** сотенъ, B и C **значенія цыфръ** десятковъ и единицъ числа N. Напр., если $N=35972$, то

число сотенъ $A=359$,
цыфра десятковъ $B=\;\;7$,
цыфра единицъ $\;\;C=\;\;2$.

Пусть квадратный корень изъ числа N будетъ $10x+y$, гдѣ x—**число** десятковъ, y—**цыфра** единицъ. Тогда, на основаніи опредѣленія квадратнаго корня, съ точностью до единицы, имѣемъ:

$$(10x+y)^2 \leqslant N<(10x+y+1)^2.$$

Если $\quad (10x+y)^2 \leqslant N$, то и подавно

$$100x^2<N \text{ *)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

***) Если вмѣсто $(10x+y)^2$ мы пишемъ только $100x^2$, то есть отбрасываемъ члены $20xy+y^2$, то неравенство отъ этого *усиливается*; равенство же, если оно имѣло мѣсто, *вообще*, нарушается и обращается въ неравенство за исключеніемъ того частнаго случая, когда $y=0$.**

Также, если $(10x+y+1)^2>N$, то, очевидно, неравенство не нарушится, если вмѣсто $(y+1)$ мы подставимъ число 10, во всякомъ случаѣ *не меньшее* чѣмъ $(y+1)$ *), т. е.

$$(10x+10)^2>N, \text{ или } 100(x+1)^2>N \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Изъ (1) и (2) имѣемъ:

$$100x^2<N<100(x+1)^2,$$

или, подставляя вмѣсто N его значенiе:

$$100x^2<100A+10B+C<100(x+1)^2,$$

откуда, раздѣливъ на 100:

$$x^2<A+\frac{10B+C}{100}<(x+1)^2.$$

Но $\frac{10B+C}{100}$ есть правильная дробь, и слѣд., по предыдущей теоремѣ (§ 15) не можетъ имѣть влiянiя на величину x. Итакъ,

$$x^2\leqslant A<(x+1)^2,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

17. Для полученiя числа десятковъ, заключенныхъ въ квадратномъ корнѣ, нужно, какъ только что доказано, взять число сотенъ даннаго числа и извлечь, съ точностью до единицы по недостатку, квадратный корень изъ полученнаго результата. Если данное число есть число цѣлое, то для полученiя числа его сотенъ, достаточно отбросить двѣ послѣднiя цыфры справа. Поэтому можно дать **правило**:

Число десятковъ, заключенныхъ въ квадратномъ корнѣ цѣлаго числа N, есть квадратный корень, съ точностью до единицы по недостатку, изъ числа N_1, полученнаго послѣ отбрасыванiя двухъ послѣднихъ цыфръ числа N.

Это же правило можно приложить и къ корню изъ числа N_1: число десятковъ, заключенныхъ въ немъ, получится, если мы извлечемъ, съ точностью до единицы по недостатку,

---

*) Неравенство это останется безъ перемѣны при $y=9$ и *усилится* при всякомъ другомъ значенiи y отъ 0 до 8.

квадратный корень изъ числа N_2, полученнаго послѣ отбрасыванія двухъ послѣднихъ цыфръ числа N_1. Очевидно, что число десятковъ, заключенныхъ въ $\sqrt{N_1}$, равно числу сотенъ, заключенныхъ въ $\sqrt{N}$, а потому можно сказать:

Число сотенъ, заключенныхъ въ квадратномъ корнѣ цѣлаго числа N, есть квадратный корень, съ точностью до единицы по недостатку, изъ числа N_2, полученнаго послѣ отбрасыванія четырехъ послѣднихъ цыфръ въ числѣ N.

Подобное же правило можно вывести и для числа тысячъ, десятковъ тысячъ . . . и т. д., заключенныхъ въ квадратномъ корнѣ цѣлаго числа N.

На этомъ основано *разбиваніе числа на грани* отъ правой руки къ лѣвой, по 2 цыфры въ каждой грани.

Напр., для извлеченія корня квадратнаго изъ числа 7235971 разсуждаемъ такъ:

Число десятковъ, заключающихся въ искомомъ корнѣ, равно корню квадратному изъ числа его сотенъ, т. е. изъ

72359.

Число сотенъ равно корню изъ 723.

Число тысячъ равно корню изъ 7.

Итакъ, данное число разбилось на грани:

7 | 23 | 59 | 71.

18. ТЕОРЕМА III. Вычтя изъ даннаго числа квадратъ десятковъ его корня и раздѣливъ десятки остатка на удвоенное число десятковъ корня, получимъ въ частномъ число, цѣлая часть котораго больше цыфры единицъ корня, или равна ей.

Доказательство. Пусть, какъ прежде,

$$N=100A+10B+C$$

и корень квадратный, съ точностью до единицы по недостатку, изъ числа N равняется $10x+y$.

Тогда имѣемъ:

$$(1)\ .\ .\ .\ (10x+y)^2 \leqslant N\ .\ .\ \text{и}\ (2)\ .\ .\ .\ N<(10x+y+1)^2.$$

Изъ (1) пишемъ:

$$100x^2+20xy+y^2 \leqslant 100A+10B+C$$

Если въ лѣвой части неравенства отбросимъ y^2, то неравенство отъ этого вообще усилится, а равенство, если оно имѣло мѣсто, обратится въ неравенство *), и слѣд., вообще, получаемъ:

$$100x^2+20xy<100A+10B+C.$$

Такъ какъ правая часть больше лѣвой, то

$$100(A-x^2)+10(B-2xy)+C>0,$$

или вынося 10 въ первыхъ двухъ слагаемыхъ за скобку:

$$10\left[10(A-x^2)+(B-2xy)\right]+C>0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Теперь лѣвая часть неравенства представлена подъ видомъ двухъ слагаемыхъ, изъ коихъ C, какъ *цыфра* единицъ, не больше 9. Если бы величина, находящаяся въ прямыхъ скобкахъ, оказалась отрицательной, то отъ умноженія ея на впереди стоящую десятку получилось бы *отрицательное число десятковъ*. Отъ прибавленія къ этому отрицательному числу цыфры C, меньшей 10, знакъ суммы не измѣнился бы на положительный, и слѣд., вся лѣвая часть оказалась бы отрицательной, т. е., неравенство (3) не было бы соблюдено. Такимъ образомъ, ясно, что для сохраненія неравенства (3) величина, стоящая въ прямыхъ скобкахъ, должна быть *или положительной* или можетъ въ крайнемъ случаѣ равняться *нулю*, т. е. имѣемъ:

$$10(A-x^2)+B-2xy\geqslant 0, \text{ или}$$

$$(A-x^2)10+B\geqslant 2xy,$$

откуда

$$y\leqslant\frac{(A-x^2)10+B}{2x},$$

что и доказываетъ предложенную теорему, такъ какъ $(A-x^2)10+B$ есть, очевидно, **) число десятковъ, содержа-

---

*) За исключеніемъ того частнаго случая, когда $y=0$, такъ какъ при этомъ условіи отбрасываніе y^2 не производитъ никакого измѣненія въ написанномъ выраженіи.

**) Въ самомъ дѣлѣ, данное число равно $100A+10B+C$, квадратный корень изъ него $10x+y$. Вычитая изъ даннаго числа квадратъ найденныхъ десятковъ корня, т. е. $100x^2$, получаемъ остатокъ $100(A-x^2)+10B+C$. Здѣсь C представляетъ *цыфру* единицъ, а *число* десятковъ этого остатка, очевидно, равно $10(A-x^2)+B$.

щихся въ остаткѣ отъ вычитанія изъ даннаго числа N квадрата найденныхъ десятковъ его корня.

19. Выведемъ теперь *общій способъ извлеченія квадратнаго корня, съ точностью до единицы*, изъ даннаго числа. При этомъ на основаніи теоремы I (§ 15) достаточно ограничиться нахожденіемъ квадратнаго корня *изъ цѣлыхъ чиселъ*.

Для большей ясности и послѣдовательности изложенія подраздѣлимъ теорію этого дѣйствія на три случая.

20. Первый случай: *данное число не больше 100.* Въ этомъ случаѣ находятъ искомый корень непосредственно на основаніи опредѣленія § 14 при помощи таблицы квадратовъ чиселъ отъ нуля до десяти.

Числа: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

Квадраты: 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100.

Примѣры. Вычислить съ точностью до единицы квадратные корни изъ чиселъ *a*) 73; *b*) $18\frac{2}{3}$; *c*) 0,576.

a) $8^2<73<9^2$, и слѣд., $(\sqrt{73})_1=8$ съ нед., или 9 съ изб.

b) $4^2<18<5^2$, и слѣд., $(\sqrt{18\frac{2}{3}})_1=$ *) $(\sqrt{18})_1=4$ съ нед, или 5 съ избыт.

c) $0^2=0<1^2$, и слѣд., $(\sqrt{0,576})_1=(\sqrt{0})_1=0$ съ нед., или 1 съ избыт.

21. Второй случай: *данное число больше 100, но меньше 10000.*

Положимъ, требуется извлечь квадратный корень изъ числа 7889.

Такъ какъ 7889 больше, 100 то корень его содержитъ десятки и единицы. Пусть число десятковъ будетъ x, а цыфра единицъ y. Тогда *согласно опредѣленію* § 14 имѣемъ:

$$(10x+y)^2\leqslant 7889<(10x+y+1)^2.$$

Мы будемъ искать только *недостаточное* значеніе корня; избыточное же значеніе получимъ, прибавивъ единицу къ найденному результату.

Если число 7889 есть полный квадратъ, то

$$(10x+y)^2=7889,$$

---

*) На основаніи теоремы § 15.

въ противномъ же случаѣ

$$(10x+y)^2<7889.$$

Обозначимъ разность $7889-(10x+y)^2=R$; тогда R будетъ называться ***остаткомъ отъ извлеченія квадр. корня***; если 7889 есть полный квадратъ, то, очевидно, $R=0$.

Для нахожденія числа десятковъ корня, т. е. x, надо по теоремѣ II (§ 16) найти съ точностью до 1 *по недостатку* квадр. корень изъ сотенъ даннаго числа, т. е. изъ 78. Такъ какъ $78<100$, то корень этотъ находится согласно § 20, и недостаточное значеніе его будетъ равно 8. Итакъ, $x=8$.

Для нахожденія цыфры единицъ, согласно теоремѣ III (§ 18), вычитаемъ изъ 7889 квадратъ найденныхъ десятковъ (т. е. 64 сотни):

$$\begin{array}{r} 7889 \\ -\ 6400 \\ \hline 1489 \end{array}$$

и дѣлимъ десятки полученнаго остатка (т. е. 148) на удвоенные десятки корня (т. е. на 16). Цѣлая часть частнаго отъ этого дѣленія, 9, будетъ или равна цыфрѣ единицъ y, или же будетъ больше ея (§ 18). Итакъ,

$$y\leqslant 9.$$

Чтобы опредѣлить, будетъ ли y равно 9, или меньше 9, надо полученное *предполагаемое* значеніе корня, т. е. 89, возвысить въ квадратъ и вычесть изъ даннаго числа 7889; если $89^2\leqslant 7889$, то цыфра 9 будетъ искомая; въ противномъ случаѣ придется ее уменьшить на 1, т. е. испробовать 88; если и это окажется много, то 87, 86 и т. д. Но

$$89^2=(80+9)^2=80^2+2.80.9+9^2.$$

Изъ даннаго числа 7889 мы уже вычли 80^2 и въ остаткѣ нашли 1489; слѣд., остается только изъ этого остатка вычесть $(2.80.9+9^2)$. Преобразуемъ это выраженіе такъ:

$$2.80.9+9^2=(2.80+9).9=169.9,$$

откуда заключаемъ, что число, которое надо вычесть изъ перваго остатка, составляется сокращенно при помощи такого пріема: *надо удвоить найденную цыфру десятковъ* (что даетъ 16) *и къ полученному числу приписать справа испытуемую цыфру единицъ* (что даетъ 169); *составленное такимъ образомъ число умножаютъ на эту же испытуемую цыфру* (т. е. на 9).

Такъ какъ 169.9=1521, т. е. больше остатка (1489), то заключаемъ, что цыфра 9 не годится. Пробуемъ такимъ же образомъ 8:

$$(2.80+8).8=168.8=1344,$$

т. е. меньше перваго остатка, и слѣд., 8 есть искомая цыфра единицъ корня: $y=8$.

Итакъ, недостаточное значеніе $(\sqrt{7889})_1=88$, причемъ остатокъ отъ извлеченія

$$R=1489-1344=145.$$

Избыточное значеніе корня равно, очевидно, 89.

Дѣйствіе располагается обыкновенно такъ:

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{78'89}=88 \\ & 64 \\ 168 & 148'9 \\ 8 & 1344 \\ & \overline{145} \end{array}$$

Изъ вышеизложеннаго выводится извѣстное **правило** *для вычисленія двузначнаго корня:*

Дѣлимъ число на грани по двѣ цыфры въ каждой. . . и т. д. См. напр., Алгебру Киселева § 153.

22. Третій случай: *данное число больше 10000.*

Положимъ, требуется извлечь квадр. корень изъ 328156.

Такъ какъ число это больше 100, то по теоремѣ II (§ 16) заключаемъ, что для нахожденія десятковъ его корня надо извлечь, съ точн. до 1 по недостатку, корень квадр. изъ числа его сотенъ, т. е. изъ 3281. Такъ какъ $3281<10000$, то поступаемъ по предыдущему (§ 21):

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{32'81}=57 \\ & 25 \\ 107 & 78'1 \\ 7 & 749 \\ & \overline{32} \end{array}$$

и находимъ искомое недостаточное значенiе 57 и остатокъ отъ извлеченiя, равный 32.

Итакъ, число десятковъ корня квадр. изъ 328156 равно 57.

Для нахожденiя цыфры единицъ надо по теоремѣ III (§ 18) сперва опредѣлить остатокъ отъ вычитанiя изъ даннаго числа квадрата его десятковъ. Этотъ остатокъ, очевидно, будетъ

$$32 \text{ сотни} + 56 = 3256,$$

такъ какъ 32 есть остатокъ отъ извлеченiя корня изъ *сотенъ* даннаго числа, т. е. изъ 3281. Десятки этого остатка (325) надо раздѣлить на удвоенные десятки корня (114); цѣлая часть частнаго отъ этого дѣленiя (2) будетъ или равна цыфрѣ единицъ корня, или больше ея. Чтобы испытать найденную цыфру 2 надо, какъ въ § 21, вычесть изъ остатка 3256 число

$$(2 \,.\, 570 + 2) \,.\, 2 = 1142 \,.\, 2 = 2284.$$

Такъ какъ $2284 < 3256$, то цыфра 2 годится.

При производствѣ самого дѣйствiя извлеченiя корня, очевидно, нѣтъ надобности выдѣлять въ особую графу нахожденiе квадр. корня изъ сотенъ даннаго числа, такъ что все дѣйствiе располагается обыкновенно такъ:

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{32'81'56} = 572 \\
 & 25 \\
107 & 78'1 \\
7 & 749 \\
1142 & 325'6 \\
2 & 2284 \\
 & 972.
\end{array}$$

Остатокъ отъ извлеченiя корня $R = 972$.

Изъ этого вытекаетъ общеизвѣстное правило для вычисленiя квадр. корня, съ точностью до 1, изъ какого угодно числа.

22а. Признаки неточныхъ квадратовъ. Во многихъ случаяхъ бываетъ возможно, не производя самого дѣйствiя извлеченiя квадр. корня изъ цѣлыхъ чиселъ, опредѣлить, что таковое дѣйствіе *точно* произвести невозможно, т. е., что данное число *не представляетъ собой полнаго квадрата*. Это основано на знаніи слѣдующихъ легко доказываемыхъ *признаковъ*.

1. Квадратъ всякаго цѣлаго числа оканчивается той же цыфрой, какъ квадратъ его единицъ. Просматривая таблицу квадратовъ первыхъ чиселъ на стр. 25 (§ 20), замѣчаемъ, что квадраты всѣхъ ихъ оканчиваются только лишь слѣдующими цыфрами:

$$0, 1, 4, 5, 6, 9.$$

Отсюда выводимъ *первый признакъ*:

Всякое число, оканчивающееся на 2, или на 3, или на 7, или на 8 не можетъ быть точнымъ квадратомъ.

Таковы, напр., числа 78253; 2917; 34518 и т. д.

2. Если какое нибудь число оканчивается однимъ нулемъ, то квадратъ его оканчивается двумя нулями; если число оканчивается двумя нулями, то квадратъ его— четыремя нулями и т. д. Вообще, полный квадратъ можетъ оканчиваться только *четнымъ числомъ* нулей.

Это даетъ *второй признакъ*:

Всякое число, оканчивающееся однимъ, тремя, пятью и вообще нечетнымъ числомъ нулей, не можетъ быть точнымъ квадратомъ.

3. Если данное число четное, т. е. имѣетъ видъ $2n$, то квадратъ его будетъ $4n^2$, т. е. дѣлится на 4.

Если число дѣлится на 3, т. е. имѣетъ видъ $3m$, то квадратъ его будетъ $9m^2$, т. е. дѣлится на 9.

Если числа дѣлятся на 5, на 7 и т. д., то квадраты ихъ должны дѣлиться на 25, на 49 и т. д.

Слѣд., имѣемъ *третій признакъ*:

Если число дѣлится на 2, но не дѣлится на 4, то оно не можетъ быть точнымъ квадратомъ.

Если число дѣлится на 3, но не дѣлится на 9, то оно не можетъ быть точнымъ квадратомъ... И вообще, если число дѣлится на **простого дѣлителя** *p, но не дѣлится на p^2, то оно не можетъ быть точнымъ квадратомъ.*

Таковы, напр., числа 95726 (четное число, не дѣлящееся на 4); 52971 (сумма цыфръ 24, т. е. число, дѣлясь на 3, не дѣлится на 9) и т. д.

4. Цыфрой 5 можетъ оканчиваться только квадратъ числа, послѣдняя цыфра котораго тоже 5. Но нетрудно показать, что если какое нибудь число оканчивается на 5, то квадратъ его непремѣнно оканчивается на 25. Въ самомъ дѣлѣ, общій видъ числа, у котораго цыфра единицъ 5, будетъ $10a+5$, гдѣ a—число десятковъ. Квадратъ этого числа выразится такъ:

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25 \text{ *)}.$$

Такъ какъ произведеніе $100a(a+1)$ оканчивается двумя нулями, то, очевидно, что сумма $100a(a+1)+25$ оканчивается на 25.

Изъ вышеизложеннаго вытекаетъ *четвертый признакъ*:

Если въ какомъ нибудь числѣ цыфра единицъ равна 5, но цыфра десятковъ не равна 2, то это число не можетъ быть точнымъ квадратомъ.

5. Пусть $2n+1$ будетъ какое нибудь нечетное число; квадратъ его выразится формулой $4n^2+4n+1$; если отъ этого квадрата отнять 1, то получится $4n^2+4n$ или $4n(n+1)$. Послѣднее выраженіе непремѣнно дѣлится на 8, такъ какъ содержитъ множителемъ 4 и, кромѣ того, изъ двухъ послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ n и $n+1$ одно непремѣнно *четное*. Это даетъ возможность установить *пятый признакъ*:

Если по отнятіи единицы отъ нечетнаго числа получаемъ разность, не дѣлящуюся на 8, то такое число не можетъ быть точнымъ квадратомъ.

Примѣръ $17381-1=17380$ . . . . не дѣлится на 8, а потому 17381 не есть точный квадратъ.

Можно вывести еще нѣсколько подобныхъ же признаковъ, но ограничимся только вышеизложенными, какъ болѣе удобными для практическаго примѣненія.

Слѣдуетъ при этомъ имѣть въ виду, что всѣ эти признаки даютъ условія только лишь *необходимыя*, но отнюдь **НЕ достаточныя**. Другими словами, если какое нибудь число

---

*) Формула $(10a+5)^2=100a(a+1)+25$ даетъ, между прочимъ, возможность очень легкаго возвышенія въ квадратъ чиселъ, *оканчивающихся пятеркой*. Для этого достаточно *число десятковъ умножить на число единицей большее и къ полученному произведенію приписать 25*. Напр., $35^2=3.4$ сотни$+$ $+25=12$ сотенъ$+25=1225$. Также $85^2=8.9$ сотенъ$+25=72$ сотни$+25=7225$. Также $115^2=11.12$ сотенъ$+25=132$ сотни$+25=13225$ и т. д.

не отвѣчаетъ требованію хоть одного изъ этихъ признаковъ, то оно уже не можетъ быть точнымъ квадратомъ; но изъ того, что какое нибудь число не противорѣчитъ признакамъ, ни въ какомъ случаѣ нельзя еще утверждать, что оно представляетъ полный квадратъ, а убѣдиться въ этомъ можно только лишь при помощи непосредственнаго дѣйствія извлеченія корня.

II. ВЫЧИСЛЕНІЕ КВАДРАТНЫХЪ КОРНЕЙ СЪ ДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ ТОЧНОСТИ.

23. Опредѣленіе. *Двѣ дроби* $\frac{x}{n}$ *и* $\frac{x+1}{n}$, *удовлетворяющія неравенствамъ:*

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 \leqslant A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2,$$

называются квадратными корнями числа А, съ точностью до $\frac{1}{n}$. *Дробь* $\frac{x}{n}$ *называется корнемъ съ точностью до* $\frac{1}{n}$ *съ недостаткомъ, дробь* $\frac{x+1}{n}$ *съ избыткомъ.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ:

Квадратнымъ корнемъ числа А съ точностью до $\frac{1}{n}$ *по недостатку, называется наибольшее число, кратное* $\frac{1}{n}$, *квадратъ котораго не больше А.*

Квадратнымъ корнемъ числа А, съ точностью до $\frac{1}{n}$ *по избытку, называется наименьшее число, кратное* $\frac{1}{n}$, *квадратъ котораго больше А.*

24. Итакъ, на основаніи опредѣленія § 23, вычисленіе корня квадратнаго съ точностью до $\frac{1}{n}$ сводится къ нахожденію чиселъ x и $x+1$, удовлетворяющихъ условію

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 \leqslant A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2.$$

Умножая всѣ части этого неравенства на положительную величину n^2, получаемъ:

$$x^2 \leqslant An^2 < (x+1)^2,$$

а это на основанiи § 14 показываетъ, что числа x и $x+1$ суть не что иное, какъ корни квадратные изъ числа An^2 съ точностью до единицы. Итакъ, можно дать слѣдующее **правило**:

Для того, чтобы извлечь квадратный корень изъ числа A съ точность до $\frac{1}{n}$, надо извлечь, съ точностью до единицы, квадратный корень изъ числа An^2 и полученный результатъ умножить на степень точности $\left(т.\ е.\ на\ \frac{1}{n}\right)$.

Если условимся изображать корень квадратный изъ числа A, съ точностью до $\frac{1}{n}$, символомъ

$$(\sqrt{A})_{\frac{1}{n}},$$

а корень квадратный, съ точностью до единицы, символомъ

$$(\sqrt{A})_1,$$

то можемъ написать такое равенство:

$$(\sqrt{A})_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot (\sqrt{A.n^2})_1.$$

25. Примѣры. **I.** Извлечь корень квадратный изъ 3, съ точностью до 0,01.

Въ этомъ случаѣ $n=100$; слѣдов., согласно предыдущему правилу, надо извлечь съ точностью до единицы корень изъ

$$3 \times 100^2,$$

что дастъ 173 по недостатку и 174 по избытку, и полученный результатъ умножить на 0,01.

Слѣд., 1,73 представляетъ недостаточное значенiе искомаго корня, а 1,74—избыточное.

II. Извлечь корень изъ $5\frac{2}{7}$, съ точностью до $\frac{1}{5}$.

Въ этомъ случаѣ $n = 5$, слѣдов., надо извлечь съ точностью до единицы корень изъ числа $5\frac{2}{7} \times 25 = \frac{925}{7} = 132\frac{1}{7}$.

На основанiи § 15 имѣемъ:

$$(\sqrt{132\tfrac{1}{7}})_1 = (\sqrt{132})_1 = 11 \text{ по нед. и } 12 \text{ по изб.}$$

Слѣд., $\sqrt{5\frac{2}{7}}$, съ точностью до $\frac{1}{5}$, будетъ $\frac{11}{5}$ по недостатку и $\frac{12}{5}$ по избытку.

III. Извлечь квадратный корень изъ числа $17\frac{3}{4}$, съ точностью до $\frac{2}{11}$.

Въ этомъ случаѣ $\frac{1}{n}=\frac{2}{11}$, слѣд., $n=\frac{11}{2}$. Опредѣляемъ квадр. корень, съ точностью до единицы, изъ числа

$$17\tfrac{3}{4}\times\tfrac{121}{4}=\tfrac{8591}{16}=536\tfrac{15}{16}.$$

Но на основанiи § 15 мы знаемъ, что

$(\sqrt{536\frac{15}{16}})_1=(\sqrt{536})_1=23$ по недост. и 24 по избытку; слѣдов.,

$$\frac{46}{11}\text{ и }\frac{48}{11}$$

будутъ искомыя значенiя.

IV. Извлечь корень квадратный изъ числа 13,2, съ точностью до $\frac{3}{19}$.

Въ этомъ случаѣ $\frac{1}{n}=\frac{3}{19}$; $n=\frac{19}{3}$.

$$13{,}2\times\frac{361}{9}=\frac{47652}{90}=529\tfrac{7}{15}.$$

Но на основанiи § 15

$$(\sqrt{529\tfrac{7}{15}})_1=(\sqrt{529})_1=23\text{ по нед. и }24\text{ по изб}$$

Слѣд., $\frac{69}{19}$ и $\frac{72}{19}$ будутъ искомыя значенiя.

V. Вычислить съ точностью до $\frac{2}{11}$ выраженiе $3\sqrt{11\frac{3}{11}}$. Слѣдуетъ обратить вниманiе на то обстоятельство, что въ тѣхъ случаяхъ, когда впереди корня стоитъ нѣкоторый множитель, для полученiя заданной точности необходимо предварительно *внести его подъ знакъ радикала.* Въ самомъ дѣлѣ, если мы этого не сдѣлаемъ и вычислимъ съ точностью до $\frac{2}{11}$ только лишь $\sqrt{11\frac{3}{11}}$, то, умножая найденное значенiе на коэффицiентъ 3, мы умножимъ на 3 также и ошибку, а потому сможемъ ручаться за точность вычисленiя только лишь въ $3\cdot\frac{2}{11}$, т. е. въ $\frac{6}{11}$.

Итакъ, имѣемъ:

$$\left(3\sqrt{11\tfrac{3}{11}}\right)_{\frac{2}{11}}=\left(\sqrt{\tfrac{124}{11}\cdot 9}\right)_{\frac{2}{11}}=\tfrac{2}{11}\cdot\left(\sqrt{\tfrac{124}{11}.9.\tfrac{121}{4}}\right)_1=\tfrac{2}{11}\left(\sqrt{31.9.11}\right)_1=$$

$$=\tfrac{2}{11}\left(\sqrt{3069}\right)_1=\tfrac{110}{11}=10 \text{ съ нед., или } \tfrac{112}{11} \text{ съ изб.}$$

VI. Вычислить съ точностью до 0,1 выраженіе $\dfrac{1}{\sqrt{26}+5}$.

Прежде всего уничтожаемъ ирраціональность въ знаменателѣ дроби:

$$\frac{1}{\sqrt{26}+5}=\frac{\sqrt{26}-5}{(\sqrt{26}+5)(\sqrt{26}-5)}=\sqrt{26}-5.$$

Теперь находимъ значеніе корня изъ 26 съ точностью до 0,1:

$$(\sqrt{26})_{0,1}=0,1.(\sqrt{26.10^2})_1=0,1.(\sqrt{2600})_1=5 \text{ съ нед. и } 5,1 \text{ съ изб.}$$

Поэтому данная дробь равна 0 съ нед. и 0,1 съ изб.

Еще нѣсколько **примѣровъ для упражненія**:

Извлечь квадратные корни изъ слѣдующихъ чиселъ съ даннымъ приближеніемъ:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)_{\frac{4}{23}}. \quad \textit{Отв.}\ \frac{12}{23} \text{ по нед.; } \frac{16}{23} \text{ по изб.}$$

Вычислить $\left(\sqrt{0,31}\right)_{0,001}$ *Отв.* 0,556 по нед. и 0,557 по изб.

Вычислить $\left(\sqrt{\dfrac{5}{11}}\right)_{\frac{3}{100}}$ *Отв.* 0,66 по нед. и 0,69 по изб.

Вычислить $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\right)_{0,01}$ *Отв.* 4,23 съ нед. и 4,24 съ изб.

Вычислить $\left(4\sqrt{1,32}\right)_1$ *Отв.* 4 съ нед. и 5 съ изб.

III. О КОРНЯХЪ СТЕПЕНИ r ИЗЪ ПОЛОЖИТЕЛЬНАГО ЧИСЛА A.

26. Опредѣленіе. *Два послѣдовательныя натуральныя числа* (x) *и* $(x+1)$, *удовлетворяющія неравенствамъ*:

$$x^r \leqslant A < (x+1)^r,$$

называются корнями r*—овой степени изъ числа* A, *съ точностью до единицы.*

Число x называется корнемъ съ недостаткомъ, число $(x+1)$—корнемъ съ избыткомъ.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ:

Корень степени r изъ числа A, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, есть **наибольшее** *цѣлое число, r—овая степень котораго* **не больше** A.

Корень степени r изъ числа A, съ точностью до единицы, съ избыткомъ, есть **наименьшее** *цѣлое число, r—овая степень котораго* **больше** A.

Условимся обозначать корень r—овой степени изъ числа A, съ точностью до единицы, символомъ

$$\left(\sqrt[r]{A}\right)_1$$

26а. Слѣдуетъ замѣтить, что сдѣланное въ предыдущемъ параграфѣ опредѣленіе даетъ возможность **находить корни** какой угодно степени, съ точностью до единицы, при помощи самыхъ элементарныхъ, хотя и очень кропотливыхъ вычисленій. Процессъ дѣйствій виденъ на слѣдующихъ примѣрахъ.

I. Вычислить съ точностью до 1 корень пятой степени изъ 18932.

Беремъ рядъ натуральныхъ чиселъ, начиная съ 0, и возвышаемъ ихъ послѣдовательно въ пятыя степени.

Получаемъ:

$$0^5=0;\ 1^5=1;\ 2^5=32;\ 3^5=243;\ 4^5=1024;\ 5^5=3125;\ 6^5=7776;$$
$$7^5=16807;\ 8^5=32768\ \ldots\ldots$$

Такъ какъ $7^5<18932<8^5$, то согласно опредѣленія § 26, заключаемъ, что 7 представляетъ недостаточное, а 8 избыточное значеніе корня.

II. Вычислить съ точностью до 1 корень седьмой степени изъ 8516.

Беремъ рядъ натуральныхъ чиселъ, начиная съ 0, и возвышаемъ ихъ послѣдовательно въ седьмыя степени.

Получаемъ:

$$0^7=0;\ 1^7=1;\ 2^7=128;\ 3^7=2187;\ 4^7=16384.$$

Такъ какъ $3^7 < 8516 < 4^7$, то 3 представляетъ недостаточное, а 4—избыточное значенiе искомаго корня.

III. Вычислить съ точностью до 1 корень 249-й степени изъ 0,18356981.

Такъ какъ $0^{249} < 0{,}18356981 < 1^{249}$, то искомыя значенiя будутъ: 0 съ нед. и 1 съ изб.

IV. Вычислить съ точностью до 1 корень 70-й степени изъ 9843598732.

Такъ какъ $1^{70} < 9843598732 < 2^{70}$ *), то искомыя значенiя будутъ, очевидно, 1 съ нед. и 2 съ изб.

27. ТЕОРЕМА. Корень r—овой степени, съ точностью до единицы, изъ числа нецѣлаго равенъ корню r—овой степени, съ точностью до единицы, изъ его цѣлой части.

Т. е., если $N = A + \alpha$, гдѣ A—цѣлое число и $0 < \alpha < 1$, то

$$\left(\sqrt[r]{N}\right)_1 = \left(\sqrt[r]{A}\right)_1.$$

Доказательство этой теоремы совершенно одинаково съ аналогичной теоремой о квадратномъ корнѣ (см. § 15).

28. Опредѣленiе. *Двѣ дроби $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, удовлетворяющiя неравенствамъ:*

$$\left(\frac{x}{n}\right)^r \leqslant A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^r,$$

называются корнями r-овой степени числа A, съ точностью до $\frac{1}{n}$.

Дробь $\frac{x}{n}$ представляетъ корень съ недостаткомъ, дробь $\frac{x+1}{n}$ — съ избыткомъ.

Изъ этого опредѣленiя слѣдуетъ:

Корнемъ r-овой степени числа A, съ точностью до $\frac{1}{n}$, съ недо-

---

*) Величина выраженiя 2^{70} выражается числомъ, пишущимся *двадцатью двумя* цыфрами. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x = 2^{70}$; логариѳмируемъ: $\log x = 70 \log 2 = 70 . 0{,}30103 = 21{,}07210$. Такимъ образомъ характеристика $\log x$ равна 21, т. е., число x пишется двадцатью двумя цыфрами.

статкомъ, называется **наибольшее** *число, кратное дроби* $\frac{1}{n}$, *r-овая степень котораго* **не больше** A.

Корнемъ r-овой степени числа A, *съ точностью до* $\frac{1}{n}$, *съ избыткомъ, называется* **наименьшее** *число, кратное* $\frac{1}{n}$, *r-овая степень котораго* **больше** A.

Условимся обозначать корень r-овой степени изъ числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ символомъ:

$$\left(\sqrt[r]{A}\right)_{\frac{1}{n}}.$$

29. На основанiи предыдущаго опредѣленiя, нахожденiе корня r-овой степени изъ числа A сводится къ вычисленiю чиселъ (x) и $(x+1)$, удовлетворяющихъ неравенствамъ:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^r \leqslant A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^r.$$

Умножая всѣ члены этого неравенства па n^r, имѣемъ:

$$x^r \leqslant A \,.\, n^r < (x+1)^r,$$

а это показываетъ (§ 26), что числа x и $x+1$ суть не что иное, какъ корни r-овой степени, съ точностью до единицы, изъ числа $A \,.\, n^r$.

Итакъ, мы имѣемъ **правило**:

Для того, чтобы найти корень r-овой степени изъ числа A *съ точностью до* $\frac{1}{n}$, *надо извлечь съ точностью до единицы корень r-овой степени изъ числа* $A \,.\, n^r$ *и полученный результатъ умножить на степень точности* $\left(\text{т. е. на } \frac{1}{n}\right)$.

Алгебраически это правило выразится слѣдующей **формулой**:

$$\left(\sqrt[r]{A}\right)_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \left(\sqrt[r]{A . n^r}\right)_1$$

30. Примѣры. Найти значенiе корня пятой степени изъ $3^1/_3$ съ точностью до $\frac{2}{5}$.

На основаніи предыдущаго имѣемъ:

$$\left(\sqrt[5]{3\tfrac{1}{3}}\right)_{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}\left(\sqrt[5]{3\tfrac{1}{3}\times\left(\tfrac{5}{2}\right)^5}\right)_1=\frac{2}{5}\left(\sqrt[5]{\frac{31250}{96}}\right)_1=$$

$$=\frac{2}{5}\left(\sqrt[5]{325\tfrac{50}{96}}\right)_1=\frac{2}{5}\left(\sqrt[5]{325}\right)_1.$$

Принимая во вниманіе, что $3^5=243$ и $4^5=1024$, такъ что

$$3^5<325<4^5,$$

можемъ написать:

$\left(\sqrt[5]{325}\right)_1=3$ съ недостаткомъ, или 4 съ избыткомъ,

а слѣд.,

$\left(\sqrt[5]{3\tfrac{1}{3}}\right)_{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}\left(\sqrt[5]{325}\right)_1=\frac{6}{5}$ съ нед. и $\frac{8}{5}$ съ избыткомъ.

2. Найти $\left(\sqrt[6]{0{,}23}\right)_{\frac{1}{2}}$.

Имѣемъ согласно предыдущему:

$$\left(\sqrt[6]{0{,}23}\right)_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt[6]{0{,}23\times2^6}\right)_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt[6]{14{,}72}\right)_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt[6]{14}\right)_1.$$

Такъ какъ $1^6=1$; $2^6=64$, т. е.

$$1^6<14<2^6,$$

то $\left(\sqrt[6]{0{,}23}\right)_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ по недостатку и 1 по избытку.

3 Найти $\left(\sqrt[3]{\frac{7}{24}}\right)_{\frac{2}{31}}$.

Имѣемъ согласно предыдущему:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{7}{24}}\right)_{\frac{2}{31}}=\frac{2}{31}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{7}{24}\left(\frac{31}{2}\right)^3}\right)_1=\frac{2}{31}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{208537}{192}}\right)_1=$$

$=\frac{2}{31}\cdot\left(\sqrt[3]{1086\tfrac{25}{192}}\right)_1=\frac{2}{31}\cdot\left(\sqrt[3]{1086}\right)_1=\frac{20}{31}$ по недост. и $\frac{22}{31}$ по избытку.

Еще нѣсколько примѣровъ для упражненій.

4. Вычислить $\left(\frac{3}{7}\sqrt[3]{81\frac{5}{6}}\right)_{\frac{1}{7}}$ *Отв.* $\frac{13}{7}$ съ нед. и $\frac{14}{7}=2$ съ изб.

5. „ $\left(\sqrt[5]{23\frac{7}{11}}\right)_{\frac{3}{8}}$ *Отв.* $\frac{15}{8}$ съ нед. и $\frac{18}{8}$ съ изб.

6. „ $\sqrt[37]{534297}$ *Отв.* 1 съ нед. и 2 съ изб.

7. „ $\sqrt[311]{0{,}19879345642}$ *Отв.* 0 съ нед. и 1 съ изб.

8. „ $\sqrt[17]{\frac{3594271}{124569437}}$ *Отв.* 0 съ нед. и 1 съ изб.

31. ТЕОРЕМА. Если цѣлое число A не имѣетъ цѣлаго корня r—овой степени, то оно не имѣетъ и дробнаго.

Доказательство. Допустимъ обратное, т. е. предположимъ, что существуетъ такая несократимая дробь $\frac{a}{b}$, r-овая степень которой равна A. Допущеніе это даетъ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = A,$$

что, очевидно, невозможно, такъ какъ, если дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то и дробь $\frac{a^r}{b^r}$ тоже несократима *), а потому не можетъ равняться цѣлому числу A.

ГЛАВА III.

ОСНОВАНІЯ УЧЕНІЯ О ПРЕДѢЛАХЪ.

32. При рѣшеніи различныхъ математическихъ вопросовъ намъ приходится имѣть дѣло съ двумя видами величинъ: съ *постоянными* и съ *перемѣнными*.

Величинами *постоянными* называются такія, которыя въ данномъ вопросѣ не могутъ измѣнять своей величины, т. е. должны сохранять одно и то-же значеніе.

Таковы, напр.: сумма внѣшнихъ угловъ многоугольника, отношеніе окружности къ діаметру, величина прямого угла.

---

*) См. «Курсъ теорет. Ариѳметики» § 91.

діаметръ *данной* окружности, сумма внутреннихъ угловъ *даннаго* многоугольника . . . и т. под.

Величинами *перемѣнными* называются такія, которыя не имѣютъ одной строго опредѣленной величины, и могутъ, не нарушая условій вопроса, измѣняться въ болѣе или менѣе широкихъ границахъ. Таковы, напр.: каждый изъ угловъ треугольника, длина хорды въ данномъ кругѣ, периметръ вписаннаго и описаннаго многоугольника и т. д.

33. Для выясненія понятія о предѣлѣ, намъ необходимо ознакомиться съ особаго рода перемѣнными величинами, такъ называемыми *безконечно малыми*.

Безконечно малыми *мы будемъ называть такія перемѣнныя величины, которыя при своемъ измѣненіи численно уменьшаются и могутъ быть сдѣланы меньше всякой, напередъ заданной величины, сколь бы мала она ни была.*

Такова будетъ, напр., дробь $\frac{1}{10^n}$, гдѣ n есть произвольное натуральное число; въ самомъ дѣлѣ, чтобы эта дробь была меньше любого напередъ заданнаго числа, напр. $\frac{1}{350000}$, достаточно взять показателя $n \geqslant 6$, ибо тогда

$$\frac{1}{10^n} < \frac{1}{350000}.$$

Нельзя смѣшивать математическаго представленія о величинѣ *безконечно малой* съ обыденнымъ понятіемъ о величинѣ *очень малой*; послѣднее опредѣленіе мы придаемъ постоянной величинѣ, настолько малой, что точное измѣреніе ея ускользаетъ отъ оцѣнки нашими чувствами. Напротивъ, — величина *безконечно малая* есть количество существенно **перемѣнное**, не имѣющее одной какой-либо опредѣленной величины, но которую мы можемъ сдѣлать малой *сколь угодно, меньше любого, напередъ заданнаго постояннаго числа* ε, *какъ бы мало послѣднее ни было.*

Такимъ образомъ, желая показать, что нѣкоторая величина N безконечно мала, мы должны доказать, что можемъ удовлетворить неравенству

$$N < \varepsilon,$$

гдѣ ε есть *любое, сколь угодно малое, напередъ заданное положительное число.*

По аналогіи съ этимъ, **безконечно-большой** *величиной называется такая перемѣнная, которая можетъ быть сдѣлана больше любого, напередъ заданнаго числа A, какъ бы велико послѣднее ни было.*

Напр., величина 10^n, гдѣ n — возрастающее натуральное число, безконечно велика; въ самомъ дѣлѣ, чтобы сдѣлать ее больше, напр. 9.000.000, достаточно взять $n \geqslant 7$.

Очевидно, что понятіе о перемѣнной величинѣ, безконечно большой въ математическомъ смыслѣ, нельзя смѣшивать съ обыденнымъ представленіемъ о величинѣ *очень большой*; такъ, напр., разстояніе въ милліонъ верстъ—величина очень большая, но не безконечно-большая, ибо оно меньше, напр., чѣмъ 1.000.001 верста.

Также ничего общаго не имѣетъ понятіе о безконечно-большой величинѣ съ абсолютной безконечностью, взятой въ обыденномъ смыслѣ.

Абсолютная безконечность исключаетъ всякое представленіе о величинѣ, исключаетъ всякую идею ограниченія, и потому никоимъ образомъ не можетъ быть предметомъ математическаго изслѣдованія.

Такъ, напр., если въ дроби $\frac{1}{2-x}$ перемѣнное число x принимаетъ безчисленный рядъ значеній, все болѣе и болѣе приближающихся къ 2, *но никогда не достигающихъ* 2, то величина дроби все время увеличивается, и дробь эта становится *безконечно-большой*; если же x дѣлается равнымъ 2, то величина дроби $\frac{1}{2-x}$ не имѣетъ никакого смысла и математическому изслѣдованію подлежать не можетъ.

Всякая величина, неравная нулю, и не имѣющая вышеуказанныхъ признаковъ величинъ безконечно большихъ и безконечно малыхъ, называется *конечной.*

34. Изъ многочисленныхъ свойствъ безконечно малыхъ величинъ въ дальнѣйшемъ намъ будутъ нужны всего слѣдующія два:

I. Сумма конечнаго числа безконечно малыхъ величинъ есть величина безконечно малая.

Пусть мы имѣемъ n безконечно малыхъ величинъ a_1, a_2, a_3 . . . . a_{n-1}, a_n. Требуется доказать, что сумма ихъ, т. е.

$$a_1+a_2+a_3+ \ . \ . \ . \ . +a_n,$$

есть тоже величина безконечно малая, т. е. можетъ быть сдѣлана меньше любого, напередъ заданнаго положительнаго числа ε, какъ бы мало послѣднее ни было.

Такъ какъ величины a_1, a_2, . . . a_n по условію безконечно малы, то каждая изъ нихъ, согласно опредѣленію, можетъ быть сдѣлана меньше *любого*, напередъ заданнаго числа, напр., меньше $\frac{\varepsilon}{n}$. Итакъ, мы можемъ удовлетворить ряду неравенствъ:

$$a_1<\frac{\varepsilon}{n},\ a_2<\frac{\varepsilon}{n},\ \cdot \cdot \cdot\ a_{n-1}<\frac{\varepsilon}{n},\ \ a_n<\frac{\varepsilon}{n}.$$

Сложивъ ихъ, найдемъ:

$$a_1+a_2+a_3+ \ . \ . \ . +a_n<\frac{\varepsilon}{n}\cdot n,$$

такъ какъ слагаемое $\frac{\varepsilon}{n}$ берется n разъ; или

$$a_1+a_2+ \ . \ . \ . \ . \ . +a_n<\varepsilon,$$

что и треб. доказать.

II. Произведеніе величины безконечно малой на величину конечную есть величина безконечно малая.

Пусть α будетъ безконечно малая величина и n—конечный множитель. Тогда, по опредѣленію понятія о безк. малой величинѣ, мы можемъ всегда удовлетворить неравенству

$$\alpha<\frac{\varepsilon}{n},$$

гдѣ ε—любая, напередъ заданная величина, сколь угодно малая; умноживъ обѣ части неравенства на n, получаемъ

$$n\ .\ \alpha<\varepsilon,$$

а это и доказываетъ, что произведеніе $n\ .\ \alpha$ можетъ быть сдѣлано меньше любого числа ε, т. е. есть величина безконечно малая.

35. Положимъ, что мы имѣемъ неограниченный рядъ чиселъ:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n, a_{n+1} \ldots \ldots, \qquad (1).$$

слѣдующихъ другъ за другомъ по нѣкоторому опредѣленному закону, такъ что для вычисленія каждаго изъ чиселъ этого ряда достаточно знать номеръ мѣста, занимаемаго имъ. Если подъ обозначеніемъ a_n мы будемъ понимать *любое* изъ чиселъ ряда (1), не указывая, которое именно, такъ что a_n можетъ быть равнымъ и a_1, и a_2, и $a_3 \ldots$, то будемъ называть число a_n *перемѣннымъ числомъ*, причемъ каждое изъ чиселъ ряда (1) мы будемъ называть значеніями перемѣннаго числа.

Допустимъ, что намъ извѣстно нѣкоторое *постоянное* число L, обладающее тѣмъ свойствомъ, что численныя значенія разностей

$$(L-a_1), (L-a_2), \ldots \ldots (L-a_n), (L-a_{n+1}) \ldots$$

по мѣрѣ увеличенія значка n все уменьшаются, могутъ быть сдѣланы меньше любого напередъ заданнаго числа ε, какъ бы мало послѣднее ни было, и при дальнѣйшемъ увеличеніи n продолжаютъ оставаться менѣе ε. Тогда постоянное число L называется **предѣломъ** перемѣннаго числа a_n, опредѣляемаго рядомъ (1). Слѣдовательно:

Предѣломъ перемѣннаго числа a_n называется постоянное число L, обладающее тѣмъ свойствомъ, что численныя значенія разностей между L и a_n, начиная съ нѣкотораго натуральнаго значенія значка n дѣлаются, и при дальнѣйшемъ безграничномъ увеличеніи n продолжаютъ оставаться **меньше любого**, *напередъ заданнаго числа ε, какъ бы мало послѣднее ни было.*

Для сокращеннаго обозначенія того, что L есть предѣлъ перемѣннаго числа a_n пишутъ такъ:

$$\text{пред.}\ (a_n)_{n=\infty} = L,$$

гдѣ значекъ $n=\infty$ обозначаетъ, что неравенство

$$\text{числ. знач.}\ (L-a_n) < \varepsilon,$$

начинаетъ удовлетворяться при достаточно большомъ значеніи n и продолжаетъ удовлетворяться при дальнѣйшемъ увеличеніи значка n, т. е. номера мѣста, занимаемаго разсматриваемымъ членомъ a_n въ ряду (1).

36. Замѣчаніе. Какъ видно изъ вышеизложеннаго, одного лишь приближенія перемѣнной величины къ постоянной еще не достаточно для того, чтобы принять постоянную за предѣлъ перемѣнной; *необходимо еще, чтобы разность между ними могла быть сдѣлана сколь угодно малой.* Напр., періодическая дробь 0,989898 . . . . по мѣрѣ увеличенія числа десятичныхъ знаковъ, увеличивается и приближается къ 1, но 1 не есть предѣлъ этой дроби, такъ какъ разность между 1 и данной дробью, сколько бы въ ней ни взять десятичныхъ знаковъ, всегда больше $\frac{1}{99}$. Предѣлъ этой дроби, какъ извѣстно изъ Ариѳметики, и какъ мы провѣримъ ниже, равенъ $\frac{98}{99}$.

37. ТЕОРЕМА. Если нѣкоторое постоянное число L заключено по своей величинѣ между числами рядовъ

$$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$$
$$b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_n \ldots\ldots,$$

причемъ численныя значенія разностей

$$(a_1-b_1), (a_2-b_2), \ldots\ldots (a_n-b_n) \ldots.$$

по мѣрѣ увеличенія значка n безконечно уменьшаются и могутъ быть сдѣланы менѣе любого числа ε, то число L есть общій предѣлъ чиселъ обоихъ рядовъ.

По условію теоремы L заключено между числами обоихъ рядовъ, т. е. болѣе чиселъ одного ряда и менѣе чиселъ другого ряда; пусть напр. числа ряда

$$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots.$$

будутъ больше чиселъ ряда

$$b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_n \ldots.$$

Тогда, согласно условію, имѣемъ рядъ неравенствъ:

$$a_1 > L > b_1$$
$$a_2 > L > b_2$$
$$a_3 > L > b_3$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_n > L > b_n$$
$$\ldots\ldots$$

Изъ этихъ неравенствъ ясно, что численныя значенія разностей

$$(L-a_1);\ (L-a_2);\ (L-a_3)\ .\ .\ .\ .\ (L-a_n)\ .\ .\ .\ .\qquad (I).$$
$$(L-b_1);\ (L-b_2);\ (L-b_3)\ .\ .\ .\ .\ (L-b_n)\ .\ .\ .\ .\qquad (II).$$

менѣе соотвѣтственныхъ численныхъ значеній разностей

$$(a_1-b_1);\ (a_2-b_2);\ (a_3-b_3)\ .\ .\ .\ .\ (a_n-b_n)\ .\ .\ .\ .\ ,$$

а эти послѣднія по условію теоремы безконечно уменьшаются съ увеличеніемъ значка n и могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми. Слѣд., разности (I) и (II) и подавно могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми, т. е. число L есть общій предѣлъ чиселъ обоихъ рядовъ.

38. *Замѣчаніе.* Изложенная теорема имѣетъ очень частое примѣненіе въ Геометріи: при вычисленіи длины окружности, площади круга, объемовъ и поверхностей круглыхъ тѣлъ. Напр., длина окружности, описанной даннымъ радіусомъ, есть величина постоянная, заключенная всегда между периметрами вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ, причемъ разность между послѣдними, при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ, можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой; слѣд., на основаніи изложенной теоремы заключаемъ, что окружность есть *общій предѣлъ* для обоихъ периметровъ.

ГЛАВА IV.

I. ПОНЯТІЕ О КОРНѢ r-ОВОЙ СТЕПЕНИ ЧИСЛА А, ЕСЛИ ЭТО ЧИСЛО НЕ ИМѢЕТЪ СОИЗМѢРИМАГО КОРНЯ.

39. Дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія и возвышенія въ натуральную степень, производимыя надъ числами цѣлыми или дробными, положительными или отрицательными, даютъ въ результатѣ всегда числа цѣлыя, или дробныя и не требуютъ поэтому никакихъ новыхъ представленій о числѣ. Будемъ называть *раціональными числами* числа цѣлыя, включая сюда и нуль, и дроби, числители и знаменатели которыхъ суть цѣлыя числа; раціональныя числа могутъ быть и положительными, и отрицательными.

Извлеченіе корня r-овой степени изъ числа A, т. е. нахожденіе такого числа, r-овая степень котораго равнялась бы A, потребуетъ новаго представленія о числѣ.

Будемъ пока предполагать, что $A>0$.

Если это число A представляетъ собой точную r-овую степень числа B, то $\sqrt[r]{A}$ будетъ равенъ именно B, и, слѣд., войдетъ въ категорію чиселъ цѣлыхъ, или дробныхъ, т. е. раціональныхъ. Если же число A не представляетъ собой r-овой степени никакого раціональнаго числа, то $\sqrt[r]{A}$ долженъ быть разсматриваемъ, какъ число особой природы, и входитъ въ категорію *ирраціональныхъ чиселъ*, которыя мы теперь и разсмотримъ.

40. Выше у насъ было доказано, что если цѣлое число A не имѣетъ цѣлаго корня r-овой степени, то оно не имѣетъ и дробнаго (§ 31); докажемъ теперь слѣдующее:

ТЕОРЕМА. Если положительное раціональное число A не представляетъ собой r-овой степени раціональнаго числа, то всегда можно образовать 2 неограниченныхъ ряда раціональныхъ чиселъ, стремящихся къ нѣкоторому предѣлу, причемъ r-овыя степени этихъ чиселъ будутъ имѣть предѣлъ, равный именно данному раціональному числу A.

Для доказательства возьмемъ какое-нибудь цѣлое число n и разсмотримъ произведеніе $A \cdot n^r$. Напишемъ рядъ натуральныхъ чиселъ

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ .\ .\ .\ .\ .$$

и будемъ возвышать каждое изъ нихъ въ r-овую степень. Получимъ неограниченный рядъ возрастающихъ чиселъ:

$$0,\ 1,\ 2^r,\ 3^r,\ 4^r,\ 5^r\ .\ .\ .\ .\ .$$

Очевидно, въ этомъ ряду всегда можно найти такіе два рядомъ стоящіе члена m^r и $(m+1)^r$, что

$$m^r < A \cdot n^r < (m+1)^r, \text{ или}$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^r < A < \left(\frac{m+1}{n}\right)$$

Числа $\left(\frac{m}{n}\right)$ и $\left(\frac{m+1}{n}\right)$, удовлетворяющія этому неравенству, называются, какъ извѣстно, корнями r-овой степени изъ числа A, съ точностью до $\frac{1}{n}$ съ недостаткомъ и съ избыткомъ, и находить ихъ мы умѣемъ (§§ 28 и 29). Продолжая такимъ же образомъ, мы можемъ найти значенія корня r-овой степени числа A, съ точностью до $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{n^4}$ . . . . . и т. д. съ недостаткомъ и съ избыткомъ; пусть $\frac{m_2}{n^2}$, $\frac{m_3}{n^3}$, $\frac{m_4}{n^4}$ будутъ соотвѣтственныя недостаточныя значенія. Тогда можно написать рядъ неравенствъ:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{m}{n}\right)^r < A < \left(\frac{m+1}{n}\right)^r \\ \left(\frac{m_2}{n^2}\right)^r < A < \left(\frac{m_2+1}{n^2}\right)^r \\ \left(\frac{m_3}{n^3}\right)^r < A < \left(\frac{m_3+1}{n^3}\right)^r \end{array}\right\} \qquad (1).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Составимъ теперь 2 ряда раціональныхъ чиселъ:

$$\frac{m}{n},\ \frac{m_2}{n^2},\ \frac{m_3}{n^3},\ \frac{m_4}{n^4}\ \cdots\cdots \qquad (a).$$

$$\frac{m+1}{n},\ \frac{m_2+1}{n^2},\ \frac{m_3+1}{n^3},\ \frac{m_4+1}{n^4}\ \cdots\cdots \qquad (b).$$

Разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ равны:

$$\frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n^3},\ \frac{1}{n^4}\ \cdots\cdots,$$

т. е., при достаточномъ увеличеніи n могутъ быть сдѣланы меньше любого, напередъ заданнаго числа ε, какъ бы мало послѣднее ни было.

Слѣдов., на основаніи § 37 оба ряда чиселъ (a) и (b) стремятся къ нѣкоторому *общему предѣлу*, заключенному между числами обоихъ рядовъ.

Этотъ общій предѣлъ чиселъ рядовъ (a) и (b) называется корнемъ r-овой степени числа A и обозначается символомъ $\sqrt[r]{A}$.

Докажемъ теперь, что r-овыя степени чиселъ рядовъ (a) и (b) стремятся къ предѣлу, равному именно A.

Возвысивъ числа рядовъ (a) и (b) въ r-овыя степени, получаемъ 2 новыхъ ряда:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^r, \left(\frac{m_2}{n^2}\right)^r, \left(\frac{m_3}{n^3}\right)^r \dots \quad (c).$$

$$\left(\frac{m+1}{n}\right)^r, \left(\frac{m_2+1}{n^2}\right)^r, \left(\frac{m_3+1}{n^3}\right)^r \dots \quad (d).$$

Разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми. Въ самомъ дѣлѣ, эти разности суть:

$$\left(\frac{m+1}{n}\right)^r - \left(\frac{m}{n}\right)^r; \left(\frac{m_2+1}{n^2}\right)^r - \left(\frac{m_2}{n^2}\right)^r \dots$$

Каждая изъ этихъ разностей на основаніи § 11 можетъ быть разложена на 2 множителя, изъ коихъ первые множители:

$$\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n}; \frac{m_2+1}{n^2} - \frac{m_2}{n^2}; \frac{m_3+1}{n^3} - \frac{m_3}{n^3} \dots,$$

будучи соотвѣтственно равны

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^4} \dots,$$

безконечно убываютъ; вторые же множители вида:

$$\left[\left(\frac{m+1}{n}\right)^{r-1} + \left(\frac{m+1}{n}\right)^{r-2} \cdot \frac{m}{n} + \dots + \left(\frac{m+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{r-2} + \left(\frac{m}{n}\right)^{r-1}\right]$$

конечны, а слѣдов., и все произведеніе стремится къ нулю (§ 34).

Итакъ, ряды (c) и (d) стремятся къ *общему предѣлу*, (§ 37), и этимъ предѣломъ будетъ **именно A**, какъ число, заключенное, согласно неравенствамъ (1), между числами обоихъ рядовъ.

II. НЕСОИЗМѢРИМЫЯ ЧИСЛА.

41. *Отношеніемъ* двухъ однородныхъ величинъ A и B называется дробь, числитель и знаменатель которой суть цѣлыя числа, показывающія, сколько разъ нѣкоторая третья величина k, однородная съ A и B, содержится въ каждой изъ нихъ. Такъ, напр., если можно найти нѣкоторую величину k, содержащуюся m разъ въ A и n разъ въ B, то отношеніе A къ B будетъ равно $\frac{m}{n}$. Величина k называется *общей мѣрой* величинъ A и B. Это опредѣленіе предполагаетъ, что такая общая мѣра для A и B существуетъ, т. е., что A и B—*соизмѣримы*.

Но, какъ извѣстно, напр. изъ Геометріи, существуютъ величины, не имѣющія общей мѣры, *несоизмѣримыя* *); въ этомъ случаѣ предыдущее понятіе объ отношеніи требуетъ измѣненія.

Докажемъ, что въ этомъ случаѣ всегда можно найти *приближенное значеніе* отношенія несоизмѣримыхъ чиселъ A и B, вычисленное съ какой угодно степенью точности, т. е. можно найти такое соизмѣримое число, которое отличалось бы отъ несоизмѣримаго отношенія A къ B на произвольно малую величину.

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлимъ величину B на n равныхъ частей и пусть k будетъ величина каждой части.

Тогда $B=k \cdot n$. Вслѣдствіе несоизмѣримости A и B величина k въ A цѣлое число разъ содержаться не можетъ. Пусть k заключается въ A m разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ (конечно, меньшимъ k). Слѣдовательно,

$$m \cdot k < A < (m+1) \cdot k,$$

и, раздѣливъ на B, равное kn:

$$\frac{m}{n} < \frac{A}{B} < \frac{m+1}{n}.$$

*) Діагональ квадрата со стороною, длина окружности и длина діаметра и мног. др.

Этотъ результатъ показываетъ, что отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ A и B заключается между двумя соизмѣримыми числами $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, численная разность которыхъ равна $\frac{1}{n}$. Слѣд., каждая изъ разностей

$$\left(\frac{A}{B}-\frac{m}{n}\right) \text{ и } \left(\frac{m+1}{n}-\frac{A}{B}\right)$$

по своей численной величинѣ меньше $\frac{1}{n}$, т. е. каждое изъ соизмѣримыхъ чиселъ $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ отличается отъ несоизмѣримаго числа менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{n}$, а потому оба эти числа

$$\frac{m}{n} \text{ и } \frac{m+1}{n}$$

называются приближенными значеніями отношенія $\frac{A}{B}$ *съ точностью до* $\frac{1}{n}$. Ясно, что число n можетъ быть выбрано сколь угодно большимъ, а слѣд., дробь $\frac{1}{n}$ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой, а потому всегда можно найти приближенное отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ величинъ A и B, вычисленное съ произвольной степенью точности.

Если будемъ безпредѣльно увеличивать n, (число дѣленій величины B), по какому угодно закону, то, очевидно, и m будетъ тоже увеличиваться, и мы можемъ написать рядъ неравенствъ:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{m}{n}<\frac{A}{B}<\frac{m+1}{n}\\[2mm] \frac{m_2}{n_2}<\frac{A}{B}<\frac{m_2+1}{n_2}\\[2mm] \frac{m_3}{n_3}<\frac{A}{B}<\frac{m_3+1}{n_3}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{гдѣ } n<n_2<n_3<n_4\,.\,.\,.\,.\\[4mm] \text{и } m<m_2<m_3<m_4\,.\,.\,.\,.\end{array}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Составимъ теперь 2 ряда раціональныхъ чиселъ:

$$\frac{m}{n},\ \frac{m_2}{n_2},\ \frac{m_3}{n_3},\ \frac{m_4}{n_4}\ldots\ldots \qquad (1).$$

$$\frac{m+1}{n},\ \frac{m_2+1}{n_2},\ \frac{m_3+1}{n_3},\ \frac{m_4+1}{n_4}\ldots\ldots \qquad (2).$$

Разности между соотвѣтствующими членами этихъ рядовъ суть

$$\frac{1}{n},\ \frac{1}{n_2},\ \frac{1}{n_3},\ \frac{1}{n_4}\ldots\ldots,$$

т. е. все время убываютъ, и могутъ быть сдѣланы меньше любого, напередъ заданнаго числа ε, какъ бы мало послѣднее ни было. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы удовлетворить неравенству $\frac{1}{n_x} < \varepsilon$, достаточно взять $n_x > \frac{1}{\varepsilon}$, что всегда возможно, ибо n по условію увеличивается безпредѣльно.

Итакъ, ряды (1) и (2) обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ безконечно убываютъ, и что нѣкоторое постоянное число $\frac{A}{B}$ заключено между числами обоихъ рядовъ. Слѣд., (§ 37) $\frac{A}{B}$ есть общій предѣлъ этихъ двухъ рядовъ.

Также всякое ирраціональное число, напр. корень r-овой степени изъ числа A, если A не представляетъ точной r-овой степени, есть число несоизмѣримое. Но и въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли выше (§ 40), всегда можно найти приближенное значеніе этого несоизмѣримаго числа, вычисленное съ любой степенью точности, и можно составить 2 ряда раціональныхъ чиселъ, стремящихся къ предѣлу, равному этому несоизмѣримому—ирраціональному числу.

42. Итакъ, мы можемъ сдѣлать слѣдующее **ОПРЕДѢЛЕНІЕ**:

Несоизмѣримое число есть общій предѣлъ чиселъ двухъ раціональныхъ рядовъ, представляющихъ собой приближенныя соизмѣримыя недостаточныя и избыточныя значенія даннаго несоизмѣримаго числа, вычисленныя съ возрастающей степенью точности.

43. Примѣры. Составимъ 2 раціональные ряда, имѣющіе своимъ предѣломъ несоизмѣримое число $\sqrt{7}$.

Извлекая этотъ корень съ приближеніемъ, находимъ 2,64575 . . . . .

Имѣемъ 2 ряда чиселъ:

$$\left.\begin{array}{l} 2;\ 2{,}6;\ 2{,}64;\ 2{,}645;\ 2{,}6457;\ 2{,}64575\ .\ .\ .\ .\ . \\ 3;\ 2{,}7;\ 2{,}65;\ 2{,}646;\ 2{,}6458;\ 2{,}64576\ .\ .\ .\ .\ . \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{7}$$

Первый рядъ представляетъ собой недостаточныя значенія корня, вычисленныя съ точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 . . . . . , вообще $\frac{1}{10^n}$; второй рядъ—избыточныя значенія корня съ той-же степенью точности.

Разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ составляютъ:

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000};\ \frac{1}{10000}\ .\ .\ .\ .\ \text{вообще}\ \frac{1}{10^n},$$

т. ѣ. могутъ быть сдѣланы меньше любого, напередъ заданнаго числа ε, какъ бы мало послѣднее ни было.

Слѣдовательно, на основаніи § 37 оба эти ряда стремятся къ одному предѣлу, и этимъ общимъ предѣломъ будетъ несоизмѣримое число $\sqrt{7}$, какъ постоянное число, заключенное между членами этихъ рядовъ.

Еще примѣръ $\sqrt[3]{11} = 2{,}22398$ . . . . .

Слѣдов., $\sqrt[3]{11}$ есть общій предѣлъ двухъ рядовъ:

$$\left.\begin{array}{l} 2;\ 2{,}2;\ 2{,}22;\ 2{,}223;\ 2{,}2239;\ 2{,}22398\ .\ .\ .\ .\ . \\ 3;\ 2{,}3;\ 2{,}23;\ 2{,}224;\ 2{,}2240;\ 2{,}22399\ .\ .\ .\ .\ . \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[3]{11}$$

Также $\sqrt{23}$ есть общій предѣлъ рядовъ:

$$\left.\begin{array}{l} 4;\ 4{,}7;\ 4{,}79;\ 4{,}795;\ 4{,}7958;\ 4{,}79583\ .\ .\ .\ .\ . \\ 5;\ 4{,}8;\ 4{,}80;\ 4{,}796;\ 4{,}7959;\ 4{,}79584\ .\ .\ .\ .\ . \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{23}$$

Также несоизмѣримое число π есть общій предѣлъ рядовъ:

$$\left.\begin{array}{l} 3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415\ \ldots\ldots\ldots \\ 4;\ 3{,}2;\ 3{,}15;\ 3{,}142;\ 3{,}1416\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \pi$$

44. Выше мы видѣли (§ 40), что 2 ряда раціональныхъ чиселъ

$$\frac{m}{n};\ \frac{m_2}{n^2};\ \frac{m_3}{n^3}\ \ldots\ldots \qquad (I).$$

$$\frac{m+1}{n};\ \frac{m_2+1}{n^2};\ \frac{m_3+1}{n^3}\ \ldots\ldots \qquad (II).$$

стремятся къ предѣлу, равному $\sqrt[r]{A}$.

Нетрудно убѣдиться, что ряды

$$-\frac{m}{n},\ -\frac{m_2}{n^2},\ -\frac{m_3}{n^3}\ \ldots\ldots \qquad (III).$$

$$-\frac{m+1}{n},\ -\frac{m_2+1}{n^2},\ -\frac{m_3+1}{n^3}\ \ldots\ldots, \qquad (IV).$$

отличающіеся отъ предыдущихъ только знаками, стремятся къ предѣлу, равному $\left(-\sqrt[r]{A}\right)$.

Разсмотримъ теперь слѣдующіе два случая:

1°. Показатель корня r—число четное.

Въ этомъ случаѣ r-овыя степени чиселъ рядовъ (III) и (IV) положительны и стремятся къ предѣлу, равному $(+A)$, а потому отрицательное число $\left(-\sqrt[r]{A}\right)$ представляетъ собой также корень r-овой степени изъ числа A. Слѣд.,

Корень четной степени положительнаго числа А всегда имѣетъ одно значеніе положительное и одно значеніе отрицательное, равныя по численной величинѣ.

2°. Показатель корня r—число нечетное.

Въ этомъ случаѣ r-овыя степени чиселъ рядовъ (III) и (IV) отрицательны и стремятся къ предѣлу, равному $(-A)$.

Отсюда слѣдуетъ:

Корень нечетной степени изъ положительнаго числа не имѣетъ отрицательнаго значенія.

Также ясно, что

Корень нечетной степени изъ отрицательнаго числа имѣетъ значеніе отрицательное и не имѣетъ значенія положительнаго.

И наконецъ:

Корень четной степени изъ числа отрицательнаго не имѣетъ ни положительнаго, ни отрицательнаго значенія.

III. ДѢЙСТВІЯ НАДЪ НЕСОИЗМѢРИМЫМИ ЧИСЛАМИ.

45. Для того, чтобы имѣть возможность производить разнаго рода дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами, необходимо сперва дать опредѣленія, *что именно нужно понимать подъ этими дѣйствіями,* такъ какъ точный смыслъ всѣхъ дѣйствій извѣстенъ намъ пока только въ отношеніи чиселъ соизмѣримыхъ.

Пояснимъ сперва это на какомъ-нибудь частномъ примѣрѣ.

Пусть требуется опредѣлить, что надо понимать подъ суммой двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ, напр., $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$.

Составимъ два ряда раціональныхъ чиселъ, имѣющихъ предѣлами $\sqrt{2}$, и два другихъ ряда, стремящихся къ $\sqrt{5}$.

Такъ какъ $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, то первые два ряда будутъ:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & 1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142\ \ldots\ldots \\ (a') & 2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2}$$

Также $\sqrt{5} = 2{,}23607\ldots\ldots\ldots$, а потому имѣемъ 2 ряда:

$$\left.\begin{array}{ll} (b) & 2;\ 2{,}2;\ 2{,}23;\ 2{,}236;\ 2{,}2360;\ 2{,}23607\ \ldots\ldots \\ (b') & 3;\ 2{,}3;\ 2{,}24;\ 2{,}237;\ 2{,}2361;\ 2{,}23608\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{5}$$

Такъ какъ члены всѣхъ этихъ четырехъ рядовъ (a), (a'), (b), (b') *соизмѣримы, то мы имѣемъ право производить надъ ними какія* *угодно дѣйствія.* Сложимъ почленно числа рядовъ (a) и (b) и числа рядовъ (a') и (b'). Тогда получаемъ 2 новыхъ ряда:

(c) 3; 3,6; 3,64; 3,650; 3,6502 . . . .

(c') 5; 3,8; 3,66; 3,652; 3,6504 . . . . .

Разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ суть:

$$0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002;\ 0{,}0002\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{вообще}\ \frac{2}{10^n},$$

т. е. могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми.

Поэтому, оба эти ряда (c) *и* (c') *стремятся къ общему предѣлу* (§ *37*); этотъ то предѣлъ и называется **суммой** двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$, и обозначается знакомъ $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

46. Положимъ, мы имѣемъ два несоизмѣримыхъ числа A и B. На основаніи опредѣленія § 42, мы должны разсматривать каждое изъ этихъ чиселъ, какъ предѣлъ двухъ раціональныхъ рядовъ, представляющихъ собой приближенныя избыточныя и недостаточныя значенія даннаго несоизмѣримаго числа, вычисленныя съ возрастающей точностью. Пусть приближенныя раціональныя значенія числа A, вычисленныя съ точностью до $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^4}$ . . . . . соотвѣтственно будутъ *)

a_1, a_2, a_3, a_4 . . . . . . a_n . . . . по недостатку, и

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . . . . . . α_n . . . . по избытку.

Тѣ же значенія для числа B пусть будутъ:

b_1, b_2, b_3, b_4 . . . . . . b_n . . . . по недостатку, и

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ . . . . . . β_n . . . . по избытку.

---

*) Въ дальнѣйшемъ изложеніи будемъ обозначать ряды возрастающіе, (недостаточные), латинскими, а убывающіе, (избыточные), греческими соотвѣтствующими буквами.

Тогда число A есть общій предѣлъ двухъ рядовъ раціональныхъ чиселъ:

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{I}) & a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots \\ (\mathrm{I}') & \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_n \ldots\ldots,\end{array}\right\} \Longrightarrow A$$

причемъ разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ суть $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \ldots\ldots \frac{1}{n^k}$, т. е. могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми.

Также число B есть общій предѣлъ двухъ рядовъ раціональныхъ чиселъ:

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{II}) & b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots\ldots b_n \ldots\ldots \\ (\mathrm{II}') & \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \ldots\ldots \beta_n \ldots\ldots,\end{array}\right\} \Longrightarrow B,$$

причемъ разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ суть тѣ-же, что и въ рядахъ, опредѣляющихъ A.

47. СЛОЖЕНІЕ НЕСОИЗМѢРИМЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

Суммой двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ A и B называется **общій предѣлъ** *двухъ рядовъ, члены которыхъ представляютъ собой суммы приближенныхъ избыточныхъ и недостаточныхъ раціональныхъ значеній чиселъ A и B.*

Пусть A и B будутъ несоизмѣримыя числа, опредѣленныя какъ предѣлы рядовъ (I, I′), и (II, II′) (см. § 46).

Складываемъ почленно ряды (I) съ (II) и (I′) съ (II′), что мы вправѣ дѣлать, ибо всѣ члены этихъ рядовъ раціональны. Получимъ 2 новыхъ ряда:

(a_1+b_1); (a_2+b_2); (a_3+b_3); . . . . (a_n+b_n) . . . . (III)

$(\alpha_1+\beta_1)$; $(\alpha_2+\beta_2)$; $(\alpha_3+\beta_3)$; . . . . $(\alpha_n+\beta_n)$ . . . . (III′)

Разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ могутъ быть сдѣланы сколько угодно малыми, а потому оба ряда стремятся къ общему предѣлу. Этотъ предѣлъ и называется *суммой* двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ A и B, и обозначается символомъ $A+B$.

48. ВЫЧИТАНІЕ. *Разностью двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ A и B называется* **общій предѣлъ** *двухъ рядовъ, члены которыхъ представляютъ собой разности приближенныхъ избыточныхъ и недостаточныхъ раціональныхъ значеній чиселъ A и B.*

Пусть A и B будутъ предѣлами рядовъ (I, I'), и (II, II').

Такъ какъ члены этихъ рядовъ суть числа соизмѣримыя, то мы вправѣ производить надъ ними вычитаніе. Вычитаемъ почленно рядъ (II') изъ (I) и рядъ (II) изъ (I') *).

Получаемъ 2 новыхъ ряда:

$$(a_1-\beta_1);\ (a_2-\beta_2);\ (a_3-\beta_3)\ .\ .\ .\ .\ .\ (a_n-\beta_n)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (IV')$$

$$(\alpha_1-b_1);\ (\alpha_2-b_2);\ (\alpha_3-b_3)\ .\ .\ .\ .\ .\ (\alpha_n-b_n)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (IV'')$$

Разности между соотвѣтствующими членами суть:

$$[(\alpha_1-b_1)-(a_1-\beta_1)]\ .\ .\ .\ [(\alpha_n-b_n)-(a_n-\beta_n)]\ .\ .\ .\ .\ ,$$

или

$$[(\alpha_1-a_1)+(\beta_1-b_1)]\ .\ .\ .\ [(\alpha_n-a_n)+(\beta_n-b_n)]\ .\ .\ .\ .\ ,$$

$$\text{т. е. равны } \frac{2}{n},\ \frac{2}{n^2},\ \frac{2}{n^3},\ \frac{2}{n^4}\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

и слѣд., могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми.

Итакъ, ряды (IV') и (IV'') стремятся къ общему предѣлу. Этотъ общій предѣлъ и называется *разностью* двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ A и B и обозначается символомъ $A-B$.

49. Зная, что называется разностью несоизмѣримыхъ чиселъ A и B, можемъ сказать, что:

1°. $A=B$, если общій предѣлъ рядовъ (IV') и (IV'') есть нуль.

2°. $A>B$, если общій предѣлъ рядовъ (IV') и (IV'') есть число положительное, и

3°. $A<B$, если общій предѣлъ рядовъ (IV') и (IV'') есть число отрицательное.

---

*) Т. е. *избыточныя* значенія B *изъ недостаточныхъ* значеній A, и наоборотъ.

50. УМНОЖЕНІЕ. *Произведеніемъ двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ A и B называется* **общій предѣлъ** *двухъ рядовъ, члены которыхъ представляютъ собой произведенія приближенныхъ избыточныхъ и недостаточныхъ раціональныхъ значеній чиселъ A и B.*

Пусть A и B будутъ предѣлами рядовъ (I, I′) и (II, II′) стр. 56.

Такъ какъ члены этихъ рядовъ суть числа соизмѣримыя, то мы вправѣ произвести надъ ними дѣйствіе умноженія.

Перемноживъ почленно ряды (I) на (II) и (I′) на (II′), получаемъ 2 новыхъ ряда:

$$a_1 . b_1;\ a_2 . b_2;\ a_3 . b_3; \dots\ a_n . b_n \dots \qquad (V)$$

$$\alpha_1 . \beta_1;\ \alpha_2 . \beta_2;\ \alpha_3 . \beta_3; \dots\ \alpha_n . \beta_n \dots \qquad (V').$$

Разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми.

Въ самомъ дѣлѣ, общій видъ этихъ разностей:

$$\alpha_n . \beta_n - a_n . b_n$$

можетъ быть преобразованъ такъ:

$$\alpha_n . \beta_n - \alpha_n . b_n + \alpha_n . b_n - a_n . b_n =$$

$$= \alpha_n[\beta_n - b_n] + b_n[\alpha_n - a_n] \dots\dots (d).$$

Здѣсь разности, стоящія въ прямыхъ скобкахъ, могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми, а слѣд., величина всего выраженія (d), будучи равна суммѣ двухъ произведеній величинъ конечныхъ на величины безконечно малыя, можетъ быть сдѣлана (§ 34) сколь угодно малой.

Итакъ, ряды (V) и (V′) стремятся къ общему предѣлу. Этотъ общій предѣлъ и называется *произведеніемъ* двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ A и B, и обозначается символомъ $A . B$.

51. ДѢЛЕНІЕ. *Частнымъ отъ дѣленія двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ A и B называется* **общій предѣлъ** *двухъ рядовъ, члены которыхъ представляютъ собой частныя отъ раздѣленія приближенныхъ избыточныхъ и недостаточныхъ раціональныхъ значеній чиселъ A и B.*

Пусть A и B будутъ предѣлами рядовъ (I, I) и (II, II′) стр. 56.

Такъ какъ члены этихъ рядовъ суть числа соизмѣримыя, то мы вправѣ производить надъ ними дѣленіе.

Дѣлимъ почленно *возрастающій* рядъ (I) на *убывающій* рядъ (II′) и *убывающій* рядъ (I′) на *возрастающій* (II). Получаемъ 2 новыхъ ряда:

$$\frac{a_1}{\beta_1}; \frac{a_2}{\beta_2}; \frac{a_3}{\beta_3}; \ldots \frac{a_n}{\beta_n} \ldots\ldots \qquad \text{(VI)}$$

$$\frac{\alpha_1}{b_1}; \frac{\alpha_2}{b_2}; \frac{\alpha_3}{b_3}; \ldots \frac{\alpha_n}{b_n} \ldots\ldots \qquad \text{(VI′)}.$$

Разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми. Въ самомъ дѣлѣ, эти разности суть:

$$\left(\frac{\alpha_1}{b_1}-\frac{a_1}{\beta_1}\right); \left(\frac{\alpha_2}{b_2}-\frac{a_2}{\beta_2}\right); \ldots \left(\frac{\alpha_n}{b_n}-\frac{a_n}{\beta_n}\right) \ldots\ldots$$

Общій видъ такихъ разностей можетъ быть преобразованъ такъ:

$$\frac{\alpha_n}{b_n}-\frac{a_n}{\beta_n}=\frac{\alpha_n\beta_n-a_nb_n}{b_n\beta_n}=\frac{\alpha_n\beta_n-\alpha_n b_n+\alpha_n b_n-a_n b_n}{b_n \beta_n}=$$

$$=\frac{\alpha_n}{b_n\beta_n}\Big[\beta_n-b_n\Big]+\frac{b_n}{b_n\beta_n}\Big[\alpha_n-a_n\Big]\ldots\ldots(d).$$

Здѣсь разности, стоящія въ прямыхъ скобкахъ, могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми, а слѣд., величина всего выраженія (d), будучи равна суммѣ двухъ произведеній величинъ конечныхъ на величины безконечно малыя, можетъ быть сдѣлана (§ 34) сколь угодно малой.

Итакъ, ряды (VI) и (VI′) стремятся къ общему предѣлу. Этотъ общій предѣлъ и называется ***частнымъ*** отъ раздѣленія двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ A и B, и обозначается символомъ $\frac{A}{B}$.

52. Возвышеніе несоизмѣримыхъ чиселъ въ цѣлую и положительную степень. *Цѣлой и положительной m-овой степенью несоизмѣримаго числа A называется* **общій предѣлъ** *двухъ рядовъ, члены которыхъ представляютъ m-овыя степени приближенныхъ избыточныхъ и недостаточныхъ раціональныхъ значеній числа A.*

Пусть A будетъ общимъ предѣломъ рядовъ (I) и (I′) стр. 56.

Такъ какъ члены этихъ рядовъ суть числа соизмѣримыя, то мы вправѣ возвести каждое изъ нихъ въ m-овую степень.

Тогда получимъ 2 новыхъ ряда:

$$a_1^m;\ a_2^m;\ a_3^m;\ \ldots\ a_n^m\ \ldots \qquad \text{(VII)}$$

$$\alpha_1^m;\ \alpha_2^m;\ \alpha_3^m;\ \ldots\ \alpha_n^m\ \ldots \qquad \text{(VII′)}$$

Разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми. Въ самомъ дѣлѣ, эти разности суть:

$$(\alpha_1^m - a_1^m);\ (\alpha_2^m - a_2^m);\ \ldots\ (\alpha_n^m - a_n^m)\ \ldots$$

Общій видъ такой разности можетъ быть преобразованъ такъ:

$$\alpha_n^m - a_n^m = (\alpha_n - a_n)(\alpha_n^{m-1} + \alpha_n^{m-2}\cdot a_n + \alpha_n^{m-3}\cdot a_n^2 + \ldots + a_n^{m-1});$$

первые множители въ этихъ произведеніяхъ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми, а слѣд., и все произведеніе (§ 34) стремится къ нулю.

Итакъ, ряды (VII) и (VII′) стремятся къ общему предѣлу. Этотъ общій предѣлъ и называется m-овой степенью несоизмѣримаго числа A и обозначается символомъ A^m.

53. Извлеченіе корней изъ несоизмѣримыхъ чиселъ. *Корнемъ r-овой степени изъ несоизмѣримаго числа A называется* **общій предѣлъ** *двухъ рядовъ, члены которыхъ представляютъ корни r-овой степени изъ приближенныхъ избыточныхъ и недостаточныхъ раціональныхъ значеній числа A.*

Пусть A будетъ предѣломъ рядовъ (I) и (I′) стр. 56.

Такъ какъ члены этихъ рядовъ суть числа соизмѣримыя, то мы можемъ изъ каждаго изъ нихъ извлечь корень r-овой степени.

Образуемъ такимъ образомъ 2 новыхъ ряда:

$$\sqrt[r]{a_1};\ \sqrt[r]{a_2};\ \sqrt[r]{a_3};\ \ldots\ldots\ \sqrt[r]{a_n}\ \ldots\ (\mathrm{VIII})$$

$$\sqrt[r]{\alpha_1};\ \sqrt[r]{\alpha_2};\ \sqrt[r]{\alpha_3};\ \ldots\ldots\ \sqrt[r]{\alpha_n}\ \ldots\ (\mathrm{VIII}').$$

Каждый членъ этихъ рядовъ есть, вообще, число несоизмѣримое, такъ что ряды (VIII) и (VIII′) приводятъ насъ къ новому понятію *о перемѣнномъ ирраціональномъ числѣ.*

До сихъ поръ мы разсматривали только перемѣнныя раціональныя числа, и на основаніи свойствъ ихъ ввели понятіе о числахъ ирраціональныхъ, и опредѣлили дѣйствія надъ ними. Для большаго обобщенія представленія о числѣ, можно согласиться разсматривать *перемѣнныя ирраціональныя числа*, т. е. такія перемѣнныя числа, которыя въ своемъ измѣненіи принимаютъ рядъ ирраціональныхъ значеній:

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ \ldots\ldots\ k_n\ \ldots,$$

гдѣ каждое изъ чиселъ k, какъ число ирраціональное, есть въ свою очередь, предѣлъ нѣкоторыхъ соотвѣтствующихъ рядовъ раціональныхъ чиселъ.

Условившись распространять на перемѣнныя ирраціональныя числа всѣ тѣ законы, которые выведены нами раньше для чиселъ ирраціональныхъ, мы можемъ доказать, что ряды (VIII) и (VIII′) стремятся къ общему предѣлу, такъ какъ разности между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми. Дѣйствительно, эти разности суть:

$$\left(\sqrt[r]{\alpha_1}-\sqrt[r]{a_1}\right);\ \left(\sqrt[r]{\alpha_2}-\sqrt[r]{a_2}\right);\ \left(\sqrt[r]{\alpha_3}-\sqrt[r]{a_3}\right)\ldots\left(\sqrt[r]{\alpha_n}-\sqrt[r]{a_n}\right)\ldots$$

Общій членъ этой разности

$$\sqrt[r]{\alpha_n}-\sqrt[r]{a_n}=\left(\alpha_n-a_n\right)\frac{1}{\sqrt[r]{\alpha_n^{r-1}}+\sqrt[r]{\alpha_n^{r-2}a_n}+\ldots+\sqrt[r]{a_n^{r-1}}},$$

т. е. можетъ быть представленъ въ видѣ произведенія двухъ множителей, изъ коихъ первый ($\alpha_n - a_n$), а слѣдов., (§ 34) и все произведеніе стремится къ нулю. Слѣд., ряды (VIII) и (VIII′) стремятся къ общему предѣлу. Этотъ общій пр дѣлъ перемѣнныхъ ирраціональныхъ чиселъ рядовъ (VIII) и (VIII′) называется корнемъ r-овой степени несоизмѣримаго числа.

54. Примѣръ. Несоизмѣримое число π есть, какъ мы видѣли выше, общій предѣлъ двухъ рядовъ:

$$\left.\begin{array}{l} 3\ ;\ 3{,}1\ ;\ 3{,}14\ ;\ 3{,}141\ ;\ 3{,}1415\ \ldots\ldots \\ 4\ ;\ 3{,}2\ ;\ 3{,}15\ ;\ 3{,}142\ ;\ 3{,}1416\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \to \pi$$

Слѣд., перемѣнныя ирраціональныя числа:

$$\sqrt{3};\ \sqrt{3{,}1};\ \sqrt{3{,}14};\ \sqrt{3{,}141}\ \ldots\ldots$$
$$\sqrt{4};\ \sqrt{3{,}2};\ \sqrt{3{,}15};\ \sqrt{3{,}142}\ \ldots\ldots,$$

изъ коихъ каждое, въ свою очередь, есть предѣлъ двухъ рядовъ раціональныхъ чиселъ, стремятся къ предѣлу, равному $\sqrt{\pi}$.

55. Опредѣливши всѣ алгебраическія дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами, можемъ теперь сдѣлать слѣдующій выводъ:

Произвести различнаго рода дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами значитъ найти предѣлъ, къ которому стремится результатъ тѣхъ же дѣйствій надъ соизмѣримыми числами, представляющими собой приближенныя избыточныя и недостаточныя значенія данныхъ несоизмѣримыхъ чиселъ, вычисленныя съ возрастающей степенью точности.

ГЛАВА V.

УНИЧТОЖЕНІЕ РАДИКАЛОВЪ ВЪ ЗНАМЕНАТЕЛЯХЪ ДРОБЕЙ.

56. Если знаменатель дроби содержитъ одинъ или нѣсколько радикаловъ, то, въ видахъ упрощенія вычисленій, часто бываетъ выгодно замѣнять такія дроби другими, равными имъ, но имѣющими знаменатели раціональные, т. е., какъ говорятъ, *уничтожить ирраціональность въ знаменателѣ*

57. Покажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ *выгодность* уничтоженія иррацiональности въ знаменателяхъ.

Положимъ, что требуется вычислить величину дроби

$$x=\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}.$$

Для этого можно поступить такъ: находимъ приближенныя значенія $\sqrt{5}=2{,}2360\ .\ .\ .$; $\sqrt{2}=1{,}4142\ .\ .\ .$; сумма ихъ равна 3,6502. Для нахожденія x надо 3 раздѣлить на 3,6502. Но если умножить числителя и знаменателя данной дроби на $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$, то получимъ:

$$x=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}=2{,}2360-1{,}4142=0{,}8218.$$

Такимъ образомъ, дѣйствіе дѣленія приведено къ болѣе простому дѣйствію вычитанія, т. е., *вычисленіе упростилось.*

Другая выгода указаннаго преобразованія заключается въ возможности непосредственно опредѣлить *точность вычисленія,* которая, напр., въ данномъ случаѣ не меньше 0,0001, ибо каждый изъ корней былъ вычисленъ съ такой степенью точности.

Еще одинъ примѣръ.

Требуется вычислить величину выраженія

$$x=\frac{3}{\sqrt{29}}.$$

Если вычислить непосредственно $\sqrt{29}=5{,}38516\ .\ .\ .\ .$, то $x=\frac{3}{5{,}38516}$. Если произвести дѣленіе, то точность вычисленія будетъ равна 0,00003 *).

Если же предварительно умножить числителя и знаменателя на $\sqrt{29}$, то $x=\frac{3\sqrt{29}}{29}$, и если теперь $\sqrt{29}$ вычислить

*) Въ самомъ дѣлѣ, если $\sqrt{29}$ вычисленъ съ точностью 0,00001, то точность вычисленія дроби $\frac{3}{\sqrt{29}}=3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{29}}\right)_{0,00001}$, т. е. равна 0,00003.

съ тою же точностью до 0,00001, то величина x будетъ точна до $\frac{3}{29} \times 0{,}00001$, т. е. точнѣе, чѣмъ въ первомъ случаѣ въ 29 разъ.

Вообще, если въ дроби $\frac{a}{\sqrt[m]{b}}$ ирраціональный знаменатель вычисленъ съ точностью до $\frac{1}{n}$, то точность вычисленія всей дроби равна $a.\frac{1}{n}$, точность же вычисленія равной ей дроби $a\frac{\sqrt[m]{b^{m-1}}}{b}$ будетъ $\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{n}$, т. е. въ b разъ больше.

58. Уничтоженіе ирраціональности въ знаменателѣ возможно не всегда, а лишь въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ. Разсмотримъ главнѣйшіе изъ нихъ.

Укажемъ сперва пріемы, которыми можно уничтожить ирраціональность въ знаменателѣ, содержащемъ только *квадратные радикалы.*

1. Дробь вида $\frac{m}{\sqrt{a}}$.

Умноживъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a}$, получаемъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a}}=\frac{m\sqrt{a}}{a}.$$

2. $\frac{m}{b\sqrt{a}}$. Умноживъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a}$, получаемъ:

$$\frac{m}{b\sqrt{a}}=\frac{m\sqrt{a}}{ab}.$$

Примѣчаніе. Если a есть число не первоначальное, то полезно разложить его на множителей, и опредѣлить, какихъ множителей не достаетъ, чтобы a было полнымъ квадратомъ. Въ этомъ случаѣ достаточно умножить оба члена дроби на квадратный корень изъ произведенія недостающихъ множителей. Напр.,

$$\frac{5}{2\sqrt{18}}=\frac{5}{2\sqrt{3^2 . 2}}=\frac{5 . \sqrt{2}}{2\sqrt{3^2 . 2^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{12}.$$

3. $\frac{m}{a\pm\sqrt{b}}$. Умноживъ числителя и знаменателя на $a\mp\sqrt{b}$, получаемъ:

$$\frac{m}{a\pm\sqrt{b}}=\frac{m(a\mp\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

4. $\frac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$. Умноживъ оба члена дроби на $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$, находимъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}.$$

5. $\frac{m}{k\sqrt{a}\pm p\sqrt{b}}$. Умноживъ оба члена дроби на $k\sqrt{a}\mp p\sqrt{b}$,

находимъ: $\frac{m}{k\sqrt{a}\pm p\sqrt{b}}=\frac{m(k\sqrt{a}\mp p\sqrt{b})}{k^2a-p^2b}$.

6. $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Умноживъ оба члена дроби на

$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, и разсматривая $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, какъ одночленъ,

получаемъ: $\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+b-c+2\sqrt{ab}}$.

Въ знаменателѣ остался всего одинъ радикалъ, слѣд., привели вопросъ къ третьему случаю, разсмотрѣнному выше.

7. $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$. Разсматриваемъ знаменатель, какъ

сумму двухъ количествъ: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{c}+\sqrt{d})$, и умножаемъ оба члена дроби на разность тѣхъ же количествъ; получаемъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{m[\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}]}{(a+b-c-d)+2\sqrt{ab}-2\sqrt{cd}}.$$

Знаменатель содержитъ теперь всего три члена, и слѣд., вопросъ привелся къ предыдущему случаю.

59. Подобнымъ пріемомъ можно уничтожить въ знаменателѣ *сколько угодно квадратныхъ радикаловъ.*

Общій пріемъ въ этомъ случаѣ состоитъ въ слѣдующемъ. Если $\sqrt{a}$ есть одинъ изъ радикаловъ, который мы хотимъ уничтожить, то выносимъ его за скобки изъ всѣхъ членовъ, его содержащихъ. Знаменатель приметъ тогда видъ $A+B\sqrt{a}$, гдѣ A и B суть раціональныя или ирраціональныя выраженія, не содержащія $\sqrt{a}$. Если теперь умножимъ оба члена дроби на $A-B\sqrt{a}$, то новый знаменатель A^2-B^2a уже не будетъ содержать $\sqrt{a}$. Такъ какъ произведенное умноженіе новыхъ радикаловъ не вводитъ, а одинъ уничтожаетъ, то, очевидно, что примѣняя такой же пріемъ послѣдовательно къ каждому изъ радикаловъ, мы исключимъ ихъ всѣ.

Примѣръ. Уничтожить радикалы въ знаменателѣ дроби

$$\frac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}.$$

Отбираемъ въ знаменателѣ всѣ члены, содержащіе множитель $\sqrt{5}$. Получаемъ:

$$\frac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}=\frac{15}{\sqrt{5}.(\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}-1-4)}=$$

$$=\frac{15}{\sqrt{5}\,.\,3(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{5}(\sqrt{2}+1).$$

60. *Примѣчаніе I.* Какъ практическій пріемъ, рекомендуется начинать всегда исключеніе съ бóльшаго радикала, такъ какъ вычисленія въ этомъ случаѣ будутъ проще.

Примѣчаніе II. Придерживаясь вышеуказанныхъ общихъ правилъ, не надо упускать изъ виду, что желательно упрощать вычисленія во всѣхъ возможныхъ частныхъ случаяхъ.

Для примѣра исключимъ ирраціональность въ знаменателѣ дроби:

$$x=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{45}-\sqrt{15}-\sqrt{2}}.$$

Преобразуемъ эту дробь такъ:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{2}+\sqrt{3}\,.\,\sqrt{15}-\sqrt{15}-\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)+\sqrt{15}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{15})\,(\sqrt{3}-1)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}{26}.$$

Очевидно, что, благодаря употребленному нами искусственному пріему *), вычисленія упростились сравнительно съ общимъ случаемъ исключенія четырехъ радикаловъ, приведеннымъ подъ № 7 (§ 58).

61. Изъ случаевъ, когда въ знаменателѣ дроби содержатся радикалы степени, выше второй, разсмотримъ только тѣ, когда знаменатель представляетъ одночленъ или двучленъ.

I. Знаменатель—одночленъ.

1. $\dfrac{m}{\sqrt[n]{a}}$. Умноживъ обѣ части дроби на $\sqrt[n]{a^{n-1}}$, получимъ: $\dfrac{m}{\sqrt[n]{a}}=\dfrac{m\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$.

2. $\dfrac{m}{a\sqrt[n]{b}}=\dfrac{m\sqrt[n]{b^{n-1}}}{ab}$.

Примѣчаніе. Не надо опять таки упускать изъ виду, что слѣдуетъ пользоваться всевозможными пріемами для облегченія вычисленій. Напр.,

$$\frac{5}{\sqrt[3]{72}}=\frac{5}{\sqrt[3]{3^2\,.\,2^3}}=\frac{5\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3\,.\,2^3}}=\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}.$$

---

*) Подобное упрощеніе возможно всегда, если знаменатель состоитъ изъ четырехъ радикаловъ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$, причемъ числа a, b, c, d составляютъ геометр. пропорцію (т. е. $a\,.\,b=c\,.\,d$).

II. Знаменатель—двучленъ.

Если знаменатель дроби представляетъ сумму или разность двухъ радикаловъ какого угодно порядка, то ихъ всегда можно привести *къ общему показателю корня*. Такимъ образомъ, знаменатель всегда будетъ вида $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$.

Разсмотримъ здѣсь 2 случая.

1. Знаменатель представляетъ **разность** двухъ радикаловъ, такъ что дробь имѣетъ видъ: $\dfrac{m}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$.

Пусть $\sqrt[n]{a}=x$, $\sqrt[n]{b}=y$; тогда $a=x^n$, $b=y^n$. При всякомъ n—четномъ, или нечетномъ, имѣемъ (§ 11):

$$x^n-y^n=(x-y)\,(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots\ldots+y^{n-1}).$$

Подставляя сюда вмѣсто x и y ихъ значенія, найдемъ:

$$a-b=\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left[\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}\,.\,b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right].$$

Это равенство показываетъ, что если числителя и знаменателя данной дроби умножить на величину, стоящую въ прямыхъ скобкахъ, то знаменатель обратится въ раціональное выраженіе $a-b$. Слѣд.,

$$\frac{m}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{m\left[\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}\,.\,b}\ldots\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right]}{a-b}.$$

2. Знаменатель представляетъ **сумму** двухъ радикаловъ. Слѣд., дробь имѣетъ видъ: $\dfrac{m}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$.

Здѣсь надо разсмотрѣть 2 случая:

α) Показатель корня n—число нечетное

β) » » n— » четное.

α) $n=2k+1$.

Въ этомъ случаѣ, зная, что сумма нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на сумму первыхъ степеней тѣхъ-же количествъ (§ 11), пишемъ:

$$x^n+y^n=(x+y)\left[x^{n-1}-x^{n-2}y+\ldots\ldots-xy^{n-2}+y^{n-1}\right].$$

Подставляя въ это тождество $\sqrt[n]{a}$ вмѣсто x и $\sqrt[n]{b}$ вмѣсто y, получаемъ:

$$a+b=\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left[\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right].$$

Послѣднее равенство показываетъ, что если оба члена данной дроби умножить на величину, стоящую въ прямыхъ скобкахъ, то знаменатель обратится въ раціональное выраженіе $a+b$. Слѣд., при n—нечетномъ имѣемъ:

$$\frac{m}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}=\frac{m\left[\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right]}{a+b}.$$

β) Показатель корня *четный*, т. е. $n=2k$.

Въ этомъ случаѣ, можно употребить одинъ изъ двухъ пріемовъ:

1) Умножаемъ числителя и знаменателя данной дроби $\frac{m}{\sqrt[2k]{a}+\sqrt[2k]{b}}$ на сопряженную величину знаменателя, послѣ чего получаемъ: $\frac{m\left(\sqrt[2k]{a}-\sqrt[2k]{b}\right)}{\sqrt[k]{a}-\sqrt[k]{b}}$, т. е. теперь въ знаменателѣ находится *разность* двухъ радикаловъ, преобразуемая, какъ указано выше. Или же:

2) Замѣчая, что разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на сумму первыхъ степеней тѣхъ же количествъ (§ 11), имѣемъ:

$$a-b=\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left[\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\ldots\ldots+\right.$$
$$\left.+\sqrt[n]{ab^{n-2}}-\sqrt[n]{b^{n-1}}\right],$$

и слѣд., при n четномъ получимъ:

$$\frac{m}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}=\frac{m\left[\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}-\sqrt[n]{b^{n-1}}\right]}{a-b}.$$

61a. Укажемъ еще общій пріемъ уничтоженія ирраціональности въ знаменателѣ, представляющемъ алгебраическую сумму *трехъ кубичныхъ радикаловъ*.

Для этой цѣли служитъ слѣдующее легко провѣряемое тождество:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) \; ^{*)}$$

Пусть данная дробь имѣетъ видъ:

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.$$

Обозначаемъ $\sqrt[3]{a}=x$, $\sqrt[3]{b}=y$, $\sqrt[3]{c}=z$ и подставляемъ эти значенія въ вышенаписанное тождество. Получаемъ:

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})\Big[\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-$$
$$-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\Big].$$

Отсюда ясно, что, умноживши числителя и знаменателя данной дроби на выраженіе, стоящее въ прямыхъ скобкахъ, получимъ дробь, равную данной:

$$\frac{m(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc})}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Если произведеніе abc случайно окажется точнымъ кубомъ, то преобразованіе окончено; въ противномъ же случаѣ переписываемъ знаменатель въ видѣ

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^3}-\sqrt[3]{27abc},$$

послѣ чего остается еще уничтожить разность двухъ кубичныхъ радикаловъ, что мы уже умѣемъ дѣлать на основаніи предыдущаго параграфа.

Примѣръ. Уничтожить ирраціональность въ знаменателѣ дроби

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}.$$

---

*) Имѣемъ: *лѣв. часть*$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2-xy+y^2)-z(x^2-xy+y^2)+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2-xy+y^2)-zx^2-zy^2-2xyz+z^3=(x+y+z)(x^2-xy+y^2)+z[z^2-(x+y)^2]=(x+y+z)(x^2-xy+y^2)+z(z+x+y)(z-x-y)=(x+y+z)(x^2-xy+y^2+z^2-zx-zy)=$*прав. части.*

Пусть $\sqrt[3]{2}=x$, $\sqrt[3]{6}=y$, $\sqrt[3]{18}=z$. Подставляя эти значенія x, y и z въ тождество

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz),$$

получаемъ:

$$2+6+18-3\sqrt[3]{2.6.18}=(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18})\,[\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{324}-$$
$$-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{108}].$$

Слѣдовательно, умножая оба члена данной дроби на величину, стоящую въ прямыхъ скобкахъ, найдемъ:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{324}-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{108}}{8}.$$

62. Примѣры. Уничтожить ирраціональность въ знаменателяхъ слѣдующихъ дробей:

I. $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=$$
$$=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}.$$

II. $$\frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2x}+\sqrt{3x}}=\frac{2x\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{2x}-\sqrt{3x})}{2x\sqrt{2}}=$$
$$=\sqrt{x}+\sqrt{2x}-\sqrt{3x}.$$

III. $$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{6}}}=\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{72}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{72}\,\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{4}=3(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1).$$

IV. $$\frac{15}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{15(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{5}=3(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}).$$

V. $$\frac{35}{1+\sqrt[4]{6}}=\frac{35(1-\sqrt[4]{6})}{1-\sqrt{6}}=\frac{35(1-\sqrt[4]{6})(1+\sqrt{6})}{-5}=$$
$$=7(\sqrt[4]{6}-1)(1+\sqrt{6}).$$

VI. $$\frac{7}{2-\sqrt[3]{3}}=\frac{7}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{3}}=\frac{7(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})}{5}.$$

VII. $$\frac{5}{\sqrt[4]{7}+2\sqrt{3}}=\frac{5(\sqrt[4]{7}-2\sqrt{3})}{\sqrt{7}-12}=\frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt[4]{7})(\sqrt{7}+12)}{137}.$$

VIII. $$\frac{4}{1+\sqrt[5]{2}}=\frac{4}{\sqrt[5]{1}+\sqrt[5]{2}}=\frac{4}{3}(1-\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16}).$$

IX. $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{1}{\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{9}}=\frac{\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9}}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{9}}=$$

$$=(\sqrt[6]{9}-\sqrt[6]{8})(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}).$$

X. $$\frac{35}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}}=\frac{35}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[3]{4}}=$$

$$=\frac{35}{\sqrt[3]{3}(1+\sqrt[3]{3})+\sqrt[3]{4}(1+\sqrt[3]{3})}=\frac{35}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})\,(1+\sqrt[3]{3})}=$$

$$=\frac{35\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}\right)\left(1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{7\,.\,4}=$$

$$=\frac{5}{4}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}\right)\left(1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right).$$

Примѣчаніе. Пріемомъ, указаннымъ въ рѣшеніи послѣдней задачи, можно всегда уничтожить въ знаменателѣ сумму четырехъ кубичныхъ радикаловъ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}$, если только числа a, b, c, d составляютъ геометрическую пропорцію, какъ это и было въ данномъ случаѣ: 3 : 9=4 : 12.

ГЛАВА VI.

I. Свойства выраженія a^x.

63. Если въ выраженіи a^x показатель степени x есть число цѣлое или дробное, положительное или отрицательное, но только раціональное, то смыслъ этого выраженія вполнѣ понятенъ. Въ самомъ дѣлѣ, если x есть число цѣлое и положительное, то

$$a^x = \overbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,.\,.\,.\,a}^{x \text{ разъ}},$$

т. е. оно равно произведенію x множителей, равныхъ a.

Если x есть число цѣлое отрицательное, то выраженіе это представляетъ дробь, числитель которой равенъ единицѣ, а знаменатель равенъ a, въ степени, показатель которой есть положительное число $(-x)$.

Если x есть дробное положительное число вида $\left(\frac{m}{n}\right)$, гдѣ m и n цѣлыя и положительныя числа, то выраженіе a^x равносильно корню n-овой степени изъ m-овой степени числа a.

Если x есть дробное отрицательное число вида $\left(-\frac{m}{n}\right)$, гдѣ m и n цѣлыя и положительныя числа, то $a^x = a^{-\frac{m}{n}} =$
$= \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Если же въ выраженіи a^x показатель степени x есть число *несоизмѣримое*, то выраженіе это нуждается въ нѣкоторыхъ опредѣленіяхъ, которыя будутъ сдѣланы впослѣдствіи.

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ будемъ считать а числомъ **положительнымъ, не равнымъ единицѣ,** *и будемъ разсматривать только* **вещественныя и положительныя** *значенія корней.*

64. ТЕОРЕМА I. *A*) **Положительныя степени числа, бóльшаго единицы, суть числа, бóльшія единицы.**

B) **Отрицательныя степени числа, бóльшаго единицы, суть числа меньшія единицы.**

A. Пусть въ выраженіи a^x число $a>1$ и $x>0$.

Разсмотримъ 2 случая:

a) x—число цѣлое, *b*) x—число дробное.

a) Если x—число цѣлое, то

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \, . \, . \, . \, a}_{x \text{ разъ}},$$

т. е. a^x равно произведенію x множителей, изъ коихъ каждый больше единицы. Слѣд., ясно, что въ этомъ случаѣ и все произведеніе, т. е. $a^x>1$.

b) Если x—число дробное, равное, напр., $\frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыя и положительныя числа, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Подкоренная величина $a^m>1$, на основаніи предыдущаго, а корень цѣлаго положительнаго порядка изъ числа большаго единицы всегда больше единицы *), слѣд., $a^x>1$.

B. Пусть теперь $a>1$ и $x<0$.

Если x—число отрицательное, то $(-x)$ есть число положительное, а потому изъ предыдущаго пункта мы знаемъ, что

$$a^{-x}>1,$$

но $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; слѣдов., $\frac{1}{a^x}>1$, откуда $a^x<1$.

65. ТЕОРЕМА II. *A*) **Положительныя степени числа, меньшаго единицы, суть числа, меньшія единицы.**

B) **Отрицательныя степени числа, меньшаго единицы, суть числа, бóльшія единицы.**

A) Пусть въ выраженіи a^x будетъ $a<1$ и $x>0$.

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ противное, и пусть $\sqrt[r]{A}$, гдѣ $A>1$ и r—положительное число, будетъ меньше единицы. Возвышая обѣ части неравенства $\sqrt[r]{A}<1$ въ r-овую степень, получимъ $A<1$, что противорѣчитъ условію.

Если $a<1$, то $\frac{1}{a}>1$, а потому къ числу $\frac{1}{a}$ можно примѣнить предыдущую теорему (§ 64), т. е. можно написать:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x>1, \text{ или } \frac{1}{a^x}>1, \text{ откуда } a^x<1.$$

B) Если $a<1$ и $x<0$, то очевидно, что $\frac{1}{a}>1$; слѣд., на основанiи теоремы предыдущаго параграфа имѣемъ:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x<1, \text{ или } \frac{1}{a^x}<1, \text{ слѣд., } a^x>1.$$

66. ТЕОРЕМА III. При возрастанiи показателя степени x, величина выраженiя a^x возрастаетъ, если a больше единицы, и убываетъ, если a меньше единицы.

Пусть $p>q$; требуется доказать:

1) $$a^p>a^q, \text{ если } a>1.$$

2) $$a^p<a^q, \text{ если } a<1.$$

1. Такъ какъ $p>q$, то $p-q>0$; слѣдовательно, при $a>1$ на основанiи § 64 имѣемъ:

$$a^{p-q}>1, \text{ или } \frac{a^p}{a^q}>1, \text{ т. е. } a^p>a^q.$$

2. Если же $a<1$, то на основанiи § 65 имѣемъ:

$$a^{p-q}<1, \text{ или } \frac{a^p}{a^q}<1, \text{ т. е. } a^p<a^q.$$

67. ТЕОРЕМА IV. Если a не равно единицѣ, то всегда можно удовлетворить неравенству

$$a^x>A,$$

гдѣ A данное положительное число, сколь угодно большое.

Подраздѣлимъ доказательство на 2 случая:

I) если $a>1$, и II) если $a<1$.

I. Что при $a > 1$ величина выраженія a^x возрастаетъ съ увеличеніемъ показателя x, мы уже знаемъ изъ предыдущаго параграфа. Но изъ того, что выраженіе a^x возрастаетъ при увеличеніи x, нельзя еще выводить заключенія, что оно можетъ быть сдѣлано *сколь угодно большимъ*, больше любого числа A,—это нужно еще доказать.

Пусть a превышаетъ единицу на *положительную* величину k, такъ что $a - 1 = k$. Умноживъ лѣвую часть этого равенства на a, получимъ *неравенство*: $a^2 - a > k$, и продолжая подобное умноженіе, получимъ цѣлый рядъ неравенствъ:

$$a - 1 = k$$
$$a^2 - a > k$$
$$a^3 - a^2 > k$$
$$a^4 - a^3 > k$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{x-1} - a^{x-2} > k$$
$$a^x - a^{x-1} > k.$$

Складывая всѣ эти неравенства, получимъ въ лѣвой части $a^x - 1$, въ правой же части слагаемое k повторится x разъ, т. е. будетъ xk.

Очевидно, что сумма x слагаемыхъ, изъ коихъ одно равно k, а остальныя $(x-1)$ больше чѣмъ k, будетъ болѣе, чѣмъ kx, т. е.

$$a^x - 1 > kx, \text{ или}$$
$$a^x > kx + 1.$$

Пользуясь неопредѣленностью числа x, подберемъ его такимъ образомъ, чтобы правая часть послѣдняго неравенства обратилась въ A, или въ число, большее чѣмъ A, т. е. чтобы

$$kx + 1 \geqslant A,$$

откуда $x \geqslant \dfrac{A-1}{k}$ . . . . (I).

Понятно, что взявъ для x такое значеніе, получимъ $a^x > A$.

Итакъ, для удовлетворенія неравенству $a^x > A$, достаточно выбрать показателя степени x, равнымъ, или болѣе, чѣмъ $\dfrac{A-1}{k}$, т. е. чѣмъ $\dfrac{A-1}{a-1}$.

Примѣры. 1. Найти показателя степени x, при которомъ величина выраженія $(1{,}001)^x$ будетъ болѣе 400.

Здѣсь $k=0{,}001$; $A=400$, а слѣд., для x достаточно взять величину, большую, или равную

$$\frac{400-1}{0{,}001}=399000.$$

Слѣд., $(1{,}001)^x > 400$, при $x \geqslant 399000$.

2. При какомъ x удовлетворяется неравенство

$$(1{,}03)^x > 5002?$$

Отв. При $x \geqslant \frac{5001}{0{,}03}$, т. е. при $x \geqslant 166700$.

II. Пусть a будетъ меньше единицы; тогда $\frac{1}{a}>1$, и слѣд., къ величинѣ $\frac{1}{a}$ можетъ быть примѣненъ предыдущій выводъ: $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ будетъ больше A, при всѣхъ значеніяхъ x, бо̀льшихъ или равныхъ $\frac{A-1}{k}$, гдѣ k по предыдущему равно $\left(\frac{1}{a}-1\right)$.

Итакъ, $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{A-1}{k}} > A$, или $a^{-\frac{A-1}{k}} > A$.

Отсюда мы видимъ, что для удовлетворенія неравенства $a^x > A$, при $a<1$, достаточно для показателя степени x вычислить численное значеніе по формулѣ:

$$x \geqslant \frac{A-1}{\frac{1}{a}-1}$$

и взять это значеніе со знакомъ *минусъ*.

68. По поводу формулъ, полученныхъ въ предыдущемъ параграфѣ для вычисленія x, удовлетворяющаго неравенству $a^x > A$, надо замѣтить, что *эти формулы даютъ всегда очень преувеличенный результатъ*. Напр., найдемъ, при какихъ значеніяхъ x удовлетворяется неравенство $21^x > 401$. Вычисляя x по формулѣ (I) предыдущаго параграфа, имѣемъ:

$$x \geqslant \frac{401-1}{21-1},\text{ т. е. } x \geqslant 20.$$

Въ дѣйствительности же ясно, что неравенство это начинаетъ удовлетворяться даже при $x \geqslant 2$, ибо $21^2 = 441 > 400$ Такимъ образомъ, пользуясь этой формулой, всегда надо помнить, что получающійся результатъ представляетъ значеніе для x *безусловно достаточное*, но что возможно обойтись и съ меньшимъ численнымъ значеніемъ x, которое можно *точно* вычислить при помощи логариѳмовъ изъ формулы

$$x > \frac{\log A}{\log a}.$$

Для примѣра, вычислимъ при помощи пятизначныхъ таблицъ, точное значеніе x, удовлетворяющее неравенству $(1{,}001)^x > 400$.

Имѣемъ:

$$x > \frac{\log 400}{\log 1{,}001}.$$

По таблицамъ находимъ

$$\log 400 = 2{,}60206,$$
$$\log 1{,}001 = 0{,}00043,$$

и слѣд.,

$$x > \frac{2{,}60206}{0{,}00043}, \text{ т. е. } x > 6051{,}3.$$

Рѣшая этотъ же вопросъ по формулѣ (1), мы получили выше $x \geqslant 399000$.

Разница, какъ видно, громадная.

Итакъ, выводы § 67 имѣютъ большое *теоретическое значеніе*, какъ доказывающіе *возможность* безусловно всегда, при a неравномъ единицѣ, удовлетворить неравенству $a^x > A$, но для практическихъ примѣненій формулы эти имѣютъ смыслъ только тогда, когда требуется самое грубое приближенное значеніе x; въ случаяхъ же, требующихъ точнаго опредѣленія x, надо прибѣгать къ помощи логариѳмическихъ таблицъ.

69. ТЕОРЕМА V. Если a не равно единицѣ, то всегда возможно удовлетворить неравенству

$$a^x < \varepsilon,$$

гдѣ ε напередъ заданное положительное число, сколь угодно малое.

Въ самомъ дѣлѣ, по условію теоремы, a не равно единицѣ, а потому и $\frac{1}{a}$ тоже неравно единицѣ. Слѣдовательно, по теоремѣ IV (§ 67) заключаемъ, что всегда возможно подобрать такое значеніе показателя степени x, что величина выраженія $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ будетъ превосходить всякое, напередъ заданное, положительное число, какъ бы оно ни было велико.

Поэтому мы можемъ всегда удовлетворить неравенству

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x > \frac{1}{\varepsilon},$$

какова бы ни была величина ε, подобравши соотвѣтствующее значеніе x по способу, указанному въ § 67. Но если

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ то } a^x < \varepsilon,$$

т. е. теорема доказана.

70. ПРИМѢРЫ. При рѣшеніи числовыхъ примѣровъ на нахожденіе значеній x, удовлетворяющихъ неравенствамъ $a^x > A$ и $a^x < \varepsilon$, надо руководствоваться слѣдующими соображеніями. Всѣ подобныя задачи могутъ быть подведены подъ одинъ изъ слѣдующихъ четырехъ типовъ:

1. Удовлетв. неравенству $a^x > A$, при $a > 1$;
2. » » $a^x > A$, при $a < 1$;
3. » » $a^x < \varepsilon$, при $a > 1$;
4. » » $a^x < \varepsilon$, при $a < 1$.

Для каждаго изъ этихъ случаевъ, разумѣется, нетрудно вывести соотвѣтствующія формулы и рѣшать подобныя задачи непосредственнымъ примѣненіемъ ихъ, но подобный способъ былъ бы нераціоналенъ, такъ какъ всѣ эти формулы очень похожи одна другую и легко могутъ быть перепутаны. Поэтому несравненно удобнѣе поступать такъ: запомнить всего лишь одну формулу (I) изъ § 67, а именно:

При $a > 1$ неравенство $a^x > A$, удовлетворяется, если

$$x \geqslant \frac{A-1}{a-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}.$$

и приводить всѣ остальные случаи къ разсмотрѣнному, при помощи элементарныхъ преобразованій, видныхъ на слѣдующихъ примѣрахъ.

1. При какихъ значеніяхъ x будетъ удовлетворено неравенство:

$$(1{,}2)^x > 500.$$

Такъ какъ здѣсь $a > 1$ и знакъ неравенства $>$, то задача рѣшается непосредственнымъ примѣненіемъ формулы (1). Такимъ образомъ, находимъ:

$$x \geqslant \frac{500-1}{1{,}2-1}, \text{ или } x \geqslant 2495.$$

2. Разыскать значенія x, удовлетворяющія неравенству:

$$\left(\frac{19}{20}\right)^x > 1000.$$

Въ данномъ случаѣ неравенство имѣетъ желательный смыслъ (т. е. знакъ его $>$), но $a < 1$. Чтобы подвести этотъ примѣръ подъ имѣющуюся формулу, переписываемъ его такъ:

$$\left(\frac{20}{19}\right)^{-x} > 1000,$$

послѣ чего изъ формулы (I) находимъ:

$$\textit{числ. знач. } x \geqslant \frac{1000-1}{\frac{20}{19}-1}, \text{ или } \textit{числ. знач. } x \geqslant 18981.$$

Итакъ, отвѣтомъ на предложенную задачу служатъ неравенства:

$$\textit{числ. знач. } x \geqslant 18981;\ x < 0.$$

3. При какихъ значеніяхъ x будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$(1{,}0001)^x < 0{,}1?$$

Такъ какъ неравенство имѣетъ не тотъ смыслъ, что нуженъ для примѣненія формулы (1), то прежде всего переворачиваемъ обѣ части его. Получается:

$$\left(\frac{10000}{10001}\right)^x > 10.$$

Остается еще переписать его такъ, чтобы a было больше единицы, что достигается очень просто при помощи отрицательныхъ показателей:

$$(1{,}0001)^{-x} > 10.$$

Примѣняя теперь формулу (I), находимъ:

$$\textit{числ. знач. } x \geqslant \frac{10-1}{1{,}0001-1}, \text{ или } \textit{числ. знач. } x \geqslant 90000.$$

Итакъ, для удовлетворенія предложенному неравенству, достаточно соблюсти требованія: *числ. знач.* $x \geqslant 90000$; $x < 0$.

4. Разыскать x, удовлетворяющее неравенству:

$$(0{,}99)^x < 0{,}03.$$

Переворачиваемъ обѣ части:

$$\left(\frac{100}{99}\right)^x > \frac{100}{3}$$

и примѣняемъ формулу (I):

$$x \geqslant \frac{\frac{100}{3}-1}{\frac{100}{99}-1}, \text{ или } x \geqslant 3201.$$

Изъ продѣланныхъ примѣровъ видно, что способы рѣшенія всѣхъ подобныхъ задачъ заключаются въ слѣдующемъ: прежде всего смотрятъ, имѣетъ ли неравенство желательный смыслъ (т. е. знакъ $>$), и если нѣтъ, то переворачиваютъ обѣ его части; потомъ смотрятъ на имѣющееся *) значеніе a; если $a > 1$, то примѣняютъ формулу (I) непосредственно; если же $a < 1$, то предварительно прибѣгаютъ къ отрицательнымъ показателямъ степени, т. е. вмѣсто a^x пишутъ $\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, послѣ чего $\frac{1}{a} > 1$, и слѣд., можно примѣнить формулу (I).

Приводимъ еще нѣсколько примѣровъ для самостоятельныхъ упражненій.

*) Послѣ переворачиванія, если оно понадобилось.

При какихъ значеніяхъ x будутъ удовлетворены неравенства:

5) $(3\frac{1}{2})^x < \frac{1}{601}$? *Отв. Числ. зн.* $x \geqslant 240$; $x < 0$.

6) $(\frac{1}{13})^x > 2401$? *Отв. Числ. зн.* $x \geqslant 200$; $x < 0$.

7) $5^x > 100000$? *Отв.* $x \geqslant \frac{99999}{4}$.

8) $(0,1)^x < 0,00003$? *Отв.* $x \geqslant \frac{99997}{27}$.

9) $17^x < \frac{3}{5246}$? *Отв. Числ. зн.* $x \geqslant \frac{5243}{48}$; $x < 0$.

10) $(\frac{2}{31})^x < \frac{1}{6601}$? *Отв.* $x \geqslant \frac{13200}{29}$.

71. ЛЕММА. При a, неравномъ единицѣ, перемѣнное число вида $a^{\frac{1}{n}}$, гдѣ n есть цѣлое положительное число, безконечно возрастающее, стремится къ предѣлу, равному единицѣ.

Разсмотримъ 2 случая:

I) Число a больше единицы, и II) число a меньше единицы.

I. Число $a > 1$, и слѣд., на основаніи § 64, и $a^{\frac{1}{n}} > 1$.

Разсмотримъ разность $\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

На основаніи § 11 можемъ написать: *)

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{a-1}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \ldots\ldots + a^{\frac{2}{n}} + a^{\frac{1}{n}} + 1.} \ldots\ldots (A).$$

Знаменатель полученной дроби, т. е.

$$a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \ldots\ldots + a^{\frac{2}{n}} + a^{\frac{1}{n}} + 1$$

представляетъ собой сумму n чиселъ, изъ коихъ послѣднее равно 1, а всѣ остальныя (§ 64) больше единицы; слѣд., знаменатель этотъ больше n.

Если въ правую часть выраженія (A) вмѣсто

$$a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \ldots\ldots + a^{\frac{1}{n}} + 1$$

---

*) Имѣемъ: $a-1 = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1^n = \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\left[a^{1-\frac{1}{n}} + a^{1-\frac{2}{n}} + \ldots\ldots + a^{\frac{2}{n}} + a^{\frac{1}{n}} + 1\right]$, откуда и вытекаетъ равенство (A).

подставимъ меньшую величину n, то равенство нарушится, и правая часть сдѣлается больще лѣвой, слѣд.,

$$a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{a-1}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (B).$$

Но дробь $\frac{a-1}{n}$, при безграничномъ возрастанiи n, можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой; для того, напр., чтобы она была менѣе ε, гдѣ ε любое, напередъ заданное число, достаточно взять $n \geqslant \frac{a-1}{\varepsilon}$, что всегда возможно, ибо по условiю n возрастаетъ *безконечно*. Итакъ, неравенство (B) показываетъ намъ, что разность

$\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$ можетъ быть сдѣлана $<\varepsilon$,

гдѣ ε любое, напередъ заданное число, а это и значитъ, что

$$\text{пред.}\left(a^{\frac{1}{n}}\right)_{n=\infty}=1.$$

II. Если $a<1$, то $\left(\frac{1}{a}\right)>1$.

Слѣд., на основанiи только что доказаннаго, можно написать:

$$\text{пред.}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}_{n=\infty}=1.$$

Но дробь можетъ стремиться къ единицѣ только тогда, когда въ предѣлѣ знаменатель дѣлается равнымъ числителю, слѣд.,

$$\text{пред.}\left(a^{\frac{1}{n}}\right)_{n=\infty}=1, \text{ что и тр. док.}$$

72. ТЕОРЕМА VI. Если въ выраженiи a^x показатель степени x получаетъ безграничный рядъ рацiональныхъ значенiй, стремящихся къ нулю, то величина всего выраженiя a^x стремится къ предѣлу, равному единицѣ.

Другими словами, *всегда возможно удовлетворить неравенству*:

$$\text{числ. знач. } (a^x-1)<\varepsilon,$$

гдѣ ε *любое положительное напередъ заданное число, сколь угодно малое.*

По условію теоремы x стремится къ нулю.

I. Предположимъ сначала, что x стремится къ нулю, принимая рядъ безконечно убывающихъ *положительныхъ* значеній

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots \ldots x_p, \ldots \ldots$$

Каковы бы ни были эти значенія, всегда возможно для каждаго изъ нихъ, напр., для x_p, найти такое цѣлое и положительное число n_p, что

$$\frac{1}{n_p}>x_p>\frac{1}{n_p+1}, \text{ *)}$$

причемъ по мѣрѣ убыванія x_p знаменатели (n_p) и (n_p+1) безпредѣльно возрастаютъ.

Если $a>1$, то на основаніи § 66 имѣемъ:

$$a^{\frac{1}{n_p}}>a^{x_p} \text{ или, } (a^{\frac{1}{n_p}}-1)>(a^{x_p}-1).$$

Но по леммѣ предыдущаго § 71, по мѣрѣ возрастанія n_p, разность:

$$(a^{\frac{1}{n_p}}-1)$$

можетъ быть сдѣлана меньше любого, напередъ заданнаго числа ε, какъ бы мало послѣднее ни было, *а слѣд., и подавно* при безконечномъ уменьшеніи x_p:

$$a^{x_p}-1<\varepsilon.$$

*) Пусть, напр., $x_p=\frac{17}{32549}$; раздѣливъ числителя и знаменателя на 17, получимъ: $x_p=\frac{1}{1914\frac{11}{17}}$; очевидно, что $\frac{1}{1914}>x_p>\frac{1}{1915}$.

Если же $a < 1$, то на основаніи того-же § 66 имѣемъ:

$a^{x_p} < a^{\frac{1}{n_p+1}}$, или *числ. значен.* $(a^{x_p}-1) <$ *числ. значен.* $(a^{\frac{1}{n_p+1}}-1)$,

гдѣ правая часть по предыдущей леммѣ можетъ бытьсдѣлана сколь угодно малой, а слѣд., и въ этомъ случаѣ $a^{x_p}-1 < \varepsilon$.

II. Если показатель степени x численно стремится къ нулю, принимая рядъ *отрицательныхъ* значеній

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots x_p \ldots,$$

то числа

$$(-x_1), (-x_2), (-x_3), \ldots \ldots (-x_p) \ldots$$

будутъ тоже стремиться къ нулю, но принимая рядъ положительныхъ значеній, а потому, на основаніи только что доказаннаго, имѣемъ:

$$\textit{пред.}\ (a^{-x})=1, \text{ или } \textit{пред.} \left(\frac{1}{a^x}\right) = 1.$$

Но дробь можетъ стремиться къ единицѣ только тогда, когда въ предѣлѣ знаменатель дѣлается равнымъ числителю; слѣд.,

$$\textit{пред.}\ (a^x) = 1, \text{ что и тр. док.}$$

73. ТЕОРЕМА VII. Соизмѣримому показателю степени x въ выраженіи a^x можно придать столь малое приращеніе, что величина всего выраженія измѣнится сколь угодно мало.

Другими словами, возможно удовлетворить неравенству:

$$\textit{числ. знач.}\ (a^{x+m}-a^x) < \varepsilon.$$

Имѣемъ:

$$\textit{числ. зн.}\ (a^{x+m}-a^x) = \textit{числ. зн.}\ a^x(a^m-1).$$

Если приращеніе m, приданное показателю x, безконечно мало, то на основаніи теоремы VI (§ 72) выраженіе (a^m-1), а слѣд., (§ 34), и все произведеніе

$$a^x.(a^m-1)$$

можетъ быть сдѣлано меньше любого, напередъ заданнаго числа ε, какъ бы мало послѣднее ни было.

74. Последнее свойство (§ 73) выраженія a^x чрезвычайно важно, такъ какъ оно показываетъ *непрерывность функціи* a^x. Въ самомъ дѣлѣ, если въ выраженіи $y=a^x$ все время увеличивать показателя степени x на величину безконечно малую, то, согласно этой теоремѣ, y будетъ увеличиваться также на величину безконечно малую, а потому если x, непрерывно возрастая на безконечно малую величину, пройдетъ черезъ **всѣ** промежуточныя значенія, заключенныя, напр., между x_1 и x_2, причемъ

$$a^{x_1}=y_1,\ a^{x_2}=y_2,$$

то при этомъ и y пройдетъ тоже *непрерывно* черезъ **всѣ** *промежуточныя* значенія, заключенныя между y_1 и y_2.

Такъ напр., мы знаемъ, что $10^2=100$ и $10^3=1000$.

На основаніи доказанной непрерывности функціи a^x, мы можемъ заключить, что если показателя степени при 10 измѣнять между 2 и 3, постепенно придавая ему каждый разъ лишь безконечно малыя приращенія, то все выраженіе 10^x, измѣняясь каждый разъ тоже на величину безконечно малую, *пройдетъ послѣдовательно непремѣнно черезъ всѣ значенія, лежащія между* 100 и 1000, т. е. будетъ напр. моментъ, когда 10^{2+x} будетъ равно 321, будетъ моментъ, когда 10^{2+x}, будетъ равно $897\frac{3}{11}$ и т. д. Свойство *непрерывности функціи* a^x чрезвычайно важно для строгаго обоснованія теоріи логариѳмовъ, какъ это видно изъ § 79.

75. Понятіе о выраженіи a^x, при x несоизмѣримомъ. Положимъ, что мы имѣемъ несоизмѣримое число x, опредѣленное на основаніи § 42, какъ предѣлъ двухъ рядовъ раціональныхъ чиселъ:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots\ldots x_n\ldots & \text{(I)}. \\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ldots\ldots \xi_n\ldots, & \text{(I')}. \end{array}\right\} \Rightarrow x$$

причемъ разности соотвѣтствующихъ членовъ обоихъ рядовъ

$$(\xi_1-x_1);\ (\xi_2-x_2);\ldots(\xi_n-x_n)\ldots\ldots,$$

по мѣрѣ увеличенія значка n, численно уменьшаются и могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми.

Такъ какъ числа x_1, x_2, ... ξ_1, ξ_2.. рядовъ (I) и (I') суть числа *раціональныя*, то мы имѣемъ право возвысить a въ степени x_1, x_2... ξ_1, ξ_2...., ибо значеніе выраженія a^x, гдѣ x число соизмѣримое, намъ извѣстно. Получаемъ такимъ образомъ 2 новыхъ ряда:

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \ldots \ldots a^{x_n} \ldots\ldots \quad \text{(II)}.$$

$$a^{\xi_1}, a^{\xi_2}, a^{\xi_3}, \ldots \ldots a^{\xi_n} \ldots\ldots \quad \text{(II')}.$$

Разности соотвѣтствующихъ членовъ обоихъ рядовъ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми.

Въ самомъ дѣлѣ, эти разности суть:

$$\left(a^{\xi_1}-a^{x_1}\right);\ \left(a^{\xi_2}-a^{x_2}\right)\ldots\ldots\left(a^{\xi_n}-a^{x_n}\right)\ldots\ldots$$

Общій видъ разности есть:

$$a^{\xi_n}-a^{x_n}=a^{x_n}\left[a^{\xi_n-x_n}-1\right]\ldots\ldots(d).$$

Но *числ. знач.* (ξ_n-x_n), при достаточно большомъ n, можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ, а потому на основаніи теоремы VI (§ 72) можемъ заключить, что численное значеніе разности $(a^{\xi_n-x_n}-1)$ можетъ быть сдѣлано меньше любого числа ε, а слѣдов., и вся величина выраженія (d), какъ произведеніе величины конечной на величину безконечно малую, можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой, меньше любого, напередъ заданнаго числа ε (§ 34).

Итакъ, ряды (II) и (II'), стремятся къ общему предѣлу. ***Этотъ общій предѣлъ чиселъ обоихъ рядовъ и разсматривается, какъ число а въ степени, показатель которой есть несоизмѣримое количество х, и обозначается знакомъ a^x.***

76. На основаніи предыдущаго параграфа, мы можемъ сдѣлать слѣдующее **опредѣленіе:**

Число съ несоизмѣримымъ показателемъ степени есть общій предѣлъ двухъ рядовъ, члены которыхъ представляютъ собой то-же число въ соизмѣримыхъ степеняхъ, стремящихся къ предѣлу, равному данному несоизмѣримому показателю степени.

77. Выяснимъ для примѣра значеніе выраженія $a^{\sqrt{6}}$.

Такъ какъ $\sqrt{6}=2{,}44949\ldots\ldots$, то ряды, стремящіеся къ предѣлу, равному $\sqrt{6}$, суть:

$$\left.\begin{array}{l} 2;\ 2{,}4;\ 2{,}44;\ 2{,}449;\ 2{,}4494\ \ldots\ldots \\ 3;\ 2{,}5;\ 2{,}45;\ 2{,}450;\ 2{,}4495\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \sqrt{6}$$

Слѣд., $a^{\sqrt{6}}$ есть общій предѣлъ двухъ рядовъ:

$$a^{2};\ a^{2,4};\ a^{2,44};\ \quad a^{2,449};\ a^{2,4494}\ \ldots\ldots \quad (1).$$

$$\Longrightarrow a^{\sqrt{6}}$$

$$a^{3};\ a^{2,5};\ a^{2,45};\ \quad a^{2,450};\ a^{2,4495}\ \ldots\ldots \quad (2).$$

Общій видъ разности соотвѣтствующихъ членовъ обоихъ рядовъ есть:

$$a^{2,44949\ldots}\cdot\left[a^{\frac{1}{10^n}}-1\right],$$

т. е. можетъ быть сдѣланъ сколь угодно малымъ.

ГЛАВА VII.

ЛОГАРИѲМЫ.

78. Имѣя уравненіе $N=a^x$, можно предложить себѣ три вопроса:

1°. По даннымъ: основанію a и показателю x вычислить a^x, т. е. число N; дѣйствіе это называется *возвышеніемъ числа a въ x-овую степень.*

2°. По даннымъ: числу N и показателю степени x найти основаніе a. Дѣйствіе это называется *извлеченіемъ корня* и обозначается: $a=\sqrt[x]{N}$.

3°. По даннымъ: числу N и основанію a найти показателя степени x, въ каковую степень надо возвысить основаніе a, чтобы получить данное число N. Дѣйствіе это называется *нахожденіемъ логариѳма числа N, при основаніи a,* и обозначается: $x=log_aN$.

Итакъ, *логариѳмомъ числа N, при основаніи a, называется показатель степени, въ которую нужно возвысить основаніе a, для полученія даннаго числа N.*

78a. Для рѣшенія многихъ задачъ на логариѳмы полезно замѣтить слѣдующее свойство.

Пусть существуетъ равенство

$$a^x = N \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

На основаніи опредѣленія понятія о логариѳмѣ, это равенство равносильно такому:

$$x = \log_a N.$$

Подставляя это значеніе вмѣсто a въ равенство (1), получаемъ **тождество:**

$$a^{\log_a N} = N.$$

Примѣры. $5^{\log_5 3} = 3$; $\left(\frac{7}{3}\right)^{\log_{\frac{7}{3}}\left(\frac{9}{5}\right)} = \frac{9}{5}$; $124^{\log_{124} 15\frac{1}{2}} = 15\frac{1}{2}$ и т. д.

79. ТЕОРЕМА. При положительномъ основаніи, неравномъ единицѣ, всякое положительное число имѣетъ логариѳмъ, и притомъ только одинъ.

Разсмотримъ 2 случая.

I. *Основаніе a больше единицы.*

Возьмемъ выраженіе a^x и придадимъ въ немъ показателю степени x рядъ всевозможныхъ значеній отъ $-\infty$ до $+\infty$:

$$-\infty \ . \ . \ . \ . \ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ . \ . \ . \ . +\infty.$$

Выраженіе a^x приметъ соотвѣтственно значенія:

$$(A) \qquad 0 \ . \ . \ . \ . \ \frac{1}{a^3}, \ \frac{1}{a^2}, \ \frac{1}{a}, \ 1, \ a, \ a^2, \ a^3, \ a^4, \ . \ . \ . \ . \ \infty,$$

представляющія собой возрастающую геометрическую прогрессію. Возьмемъ какое угодно положительное число N. Очевидно, что, или въ ряду (A) найдется какое нибудь одно число, $a^r = N$, и тогда $r = \log_a N$, или же N будетъ заключаться между какими нибудь двумя *смежными* значеніями, напр., между

$$a^p \text{ и } a^{p+1}.$$

Если обозначимъ

$$a^p = y \text{ и } a^{p+1} = y_1,$$

то

$$y_1 > N > y.$$

Придавая показателю степени p послѣдовательно рядъ значеній отъ p до $p+1$, отличающихся другъ отъ друга на безконечно малую величину, мы будемъ получать для y рядъ возрастающихъ значеній отъ y до y_1, отличающихся другъ отъ друга, вслѣдствіе свойства непрерывности показательной функціи a^x, *тоже на величину безконечно малую* (§ 74). Слѣдовательно, если показатель степени x пройдетъ черезъ **всѣ** *значенія, лежащія между* p и $p+1$, то и функція a^x, измѣняясь послѣдовательно на безконечно малую величину, пройдетъ также черезъ **всѣ** *значенія между* y и y_1, а потому всегда найдется такое одно и, очевидно, только одно, значеніе показателя степени, напр. k, лежащее между p и $p+1$, для котораго

$$a^k = N, \text{ т. е. } log_a N = k.$$

II. *Основаніе a меньше единицы.*

Если $a<1$, то $\frac{1}{a}>1$, и потому къ $\frac{1}{a}$ примѣнимо только что доказанное, т. е. каково бы ни было положительное число N, всегда или найдется такое цѣлое число r, что

$$\left(\frac{1}{a}\right)^r = N, \text{ или } a^{-r} = N,$$

откуда $log_a N = -r$, или же N будетъ заключаться между двумя смежными значеніями $\left(\frac{1}{a}\right)^p$ и $\left(\frac{1}{a}\right)^{p+1}$, и тогда, разсуждая подобно предыдущему, увидимъ, что всегда найдется одно, и только одно, число k, заключенное между p и $p+1$, для котораго

$$\left(\frac{1}{a}\right)^k = N, \text{ или } a^{-k} = N, \text{ т. е. } log_a N = -k.$$

Итакъ, теорема доказана.

80. Замѣтивъ, что при основаніи a, бо̀льшемъ единицы, $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$; $a^0 = 1$; $a^\infty = \infty$, заключаемъ:

1. Если въ выраженіи a^x, гдѣ $a>1$, показатель степени x принимаетъ какія ни есть *отрицательныя значенія* отъ $-\infty$ до 0, то величина всего выраженія принимаетъ рядъ положительныхъ значеній отъ 0 до 1. Слѣд.,

При основаніи, бо̀льшемъ единицы, логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы, отрицательны.

2. Если показатель степени x принимаетъ какія ни есть *положительныя значенія* отъ 0 до $+\infty$, то величина выраженія a^x принимаетъ рядъ положительныхъ значеній отъ 1 до $+\infty$. Слѣд.,

При основаніи, бо̀льшемъ единицы, логариѳмы чиселъ, бо̀льшихъ единицы, положительны.

81. Замѣтивъ, что при основаніи a, меньшемъ единицы, $a^{-\infty}=\frac{1}{a^{\infty}}=\frac{1}{0}=\infty$; $a^0=1$; $a^{\infty}=0$, заключаемъ:

1. Если въ выраженіи a^x, гдѣ $a<1$, показатель степени x принимаетъ какія ни есть *отрицательныя значенія* отъ $-\infty$ до 0, то величина всего выраженія принимаетъ рядъ положительныхъ значеній отъ ∞ до 1. Слѣд.,

При основаніи, меньшемъ единицы, логариѳмы чиселъ, бо̀льшихъ единицы, отрицательны.

2. Если показатель степени x принимаетъ какія ни есть *положительныя значенія* отъ 0 до $+\infty$, то при $a<1$ величина выраженія a^x принимаетъ рядъ положительныхъ значеній отъ 1 до 0. Слѣд.,

При основаніи, меньшемъ единицы, логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы, положительны.

Замѣчая, наконецъ, что при всякомъ положительномъ основаніи a, выраженіе a^x, какъ при какомъ ни есть положительномъ показателѣ, такъ и при какомъ ни есть отрицательномъ показателѣ, принимаетъ **только положительныя** значенія, заключаемъ:

При положительномъ основаніи, отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ.

Кромѣ того, ясно, что **при какомъ ни есть основаніи, логариѳмъ основанія равенъ единицѣ, а логариѳмъ единицы равенъ нулю.**

81а. При рѣшеніи многихъ теоретическихъ вопросовъ часто приходится переходить отъ одной системы логариѳмовъ къ другой, т. е., имѣя, напр., таблицу логариѳмовъ, вычисленную для основанія m, бываетъ необходимо умѣть опредѣлять логариѳмы при другомъ основаніи, напр. k.

Для этой цѣли пользуются такъ называемымъ *логариѳмическимъ модулемъ.*

Пусть, напр., дано, что логариѳмъ числа a при основанiи m равенъ p, и требуется найти логариѳмъ того же числа a, но при основанiи k.

Обозначая искомый логариѳмъ буквой x, имѣемъ по условiю:

$$log_m a = p \;.\;.\;.\;.\;.\; (1); \quad log_k a = x \;.\;.\;.\;.\;.\; (2),$$

или, замѣняя эти равенства равнозначными имъ, согласно опредѣленiю логариѳмовъ:

$$m^p = a; \; k^x = a, \text{ откуда } k^x = m^p.$$

Логариѳмируя полученное показательное уравненiе, при основанiи m, и припоминая, что логариѳмъ основанiя равенъ единицѣ, получаемъ:

$$x \, log_m k = p \, log_m m = p,$$

откуда

$$x = \frac{p}{log_m k} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3).$$

Подставляя сюда значенiе p изъ равенства (1), получаемъ:

$$x = \frac{log_m a}{log_m k}, \text{ или } log_k a = log_m a \,.\, \frac{1}{log_m k}.$$

Отсюда видно, что для составленiя таблицы логариѳмовъ при основанiи k по данной таблицѣ, при основанiи m, достаточно каждый изъ логариѳмовъ, имѣющихся въ этой таблицѣ, *умножить на дробь, числитель которой единица, а знаменатель представляетъ собой логариѳмъ новаго основанiя, взятый по старой системѣ.*

Эта дробь и называется **логариѳмическимъ модулемъ.**

Примѣры. 1. $log_5 13 = log\, 13 \,.\, \frac{1}{log 5}$ *).

---

*) Если основанiе логариѳмовъ не указано, то подразумѣвается *десятичное.*

2. Зная $log_7 2=a$, найти $log_{343} 14$.

Имѣемъ:

$$log_{343} 14 = log_7 14 \cdot \frac{1}{log_7 343} = (log_7 2 + log_7 7) \cdot \frac{1}{log_7 7^3} =$$

$$= (a+1) \cdot \frac{1}{3 log_7 7} = \frac{1}{3}(a+1).$$

3. Дано: $log_6 3 = a$; вычислить $log_4 \frac{8}{9}$.

Имѣемъ: $log_4 \dfrac{8}{9} = log_6 \dfrac{8}{9} \cdot \dfrac{1}{log_6 4} = (log_6 8 - log_6 9) \cdot \dfrac{1}{log_6 2^2} =$

$$= (3 log_6 2 - 2 log_6 3) \cdot \frac{1}{2 log_6 2} = (3 log_6 2 - 2a) \cdot \frac{1}{2 log_6 2}$$

Итакъ, вопросъ привелся къ разысканію $log_6 2$, что дѣлается очень просто, такъ какъ $log_6 3$ извѣстенъ и равенъ a:

Имѣемъ: $2 \cdot 3=6$; логариѳмируемъ при основаніи 6:

$log_6 2 + log_6 3 = log_6 6$, или $log_6 2 + a = 1$, откуда $log_6 2 = 1 - a$.

Итакъ,

$$log_4 \frac{8}{9} = \Big[3(1-a) - 2a\Big] \cdot \frac{1}{2(1-a)} = \frac{3-5a}{2(1-a)}.$$

ГЛАВА VIII.

О БЕЗКОНЕЧНО УБЫВАЮЩИХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПРОГРЕССІЯХЪ.

82. ТЕОРЕМА I. Члены безконечной геометрической возрастающей прогрессіи, увеличиваясь по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда, могутъ превзойти всякое заданное число A, сколь бы велико послѣднее ни было.

Допустимъ, что мы имѣемъ безконечную геометрическую прогрессію:

$$\div\, u,\ uq,\ uq^2,\ uq^3 \,.\,.\,.\,.\,.\,,$$

въ которой численное значеніе знаменателя $q>1$.

Общій членъ такой прогрессіи имѣетъ видъ uq^n; для того, чтобы это выраженіе было болѣе любого заданнаго числа A, достаточно сдѣлать:

$$q^n > \frac{A}{u},$$

что всегда возможно (§ 67, форм. I). Для этого достаточно выбрать показателя n, удовлетворяющимъ неравенству:

$$n \geqslant \frac{\frac{A}{u}-1}{q-1}.$$

Но, по условію, прогрессія наша *безконечная*, т. е. число членовъ n возрастаетъ безгранично, а потому удовлетворить такому неравенству всегда возможно.

Примѣръ. Дана безконечная геометрическая прогрессія:

$$\div\ 2;\ 2{,}2;\ 2{,}42\ \ldots\ldots\ldots$$

съ знаменателемъ $q=1{,}1$.

Общій членъ такой прогрессіи равенъ:

$$u_{n+1} = 2\,.\,(1{,}1)^n.$$

Найдемъ n, при которомъ $u_{n+1} > 500$.

Для этого необходимо и достаточно удовлетворить неравенству:

$$2\,.\,(1{,}1)^n > 500 \text{ или } (1{,}1)^n > 250.$$

На основаніи форм. I (§ 67), для соблюденія послѣдняго неравенства, достаточно взять:

$$n \geqslant \frac{250-1}{0{,}1},$$

откуда $n \geqslant 2490$, а потому мы можемъ утверждать, что, начиная съ члена 2491-аго, всѣ члены данной прогрессіи будутъ болѣе 500.

Въ дѣйствительности для n можно взять значеніе, гораздо меньшее (§ 68). Точное вычисленіе при помощи логариѳм. таблицъ покаваетъ, что, начиная съ u_{58}, требуемое условіе будетъ удовлетворено.

83. ТЕОРЕМА II. Члены безконечной геометрической убывающей прогрессіи, уменьшаясь по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда, могутъ быть сдѣланы меньше любого, напередъ заданнаго числа ε, какъ бы мало послѣднее ни было.

Если въ безконечной прогрессіи:

$$\div\ u,\ uq,\ uq^2,\ uq^3\ \ldots\ldots$$

u есть положительное число, а численное значеніе знаменателя q менѣе единицы, то, чтобы сдѣлать членъ $u_{n+1}=uq^n$ этой прогрессіи меньше любого числа ε, надо найти положительное число n, удовлетворяющее неравенству:

$$q^n < \frac{\varepsilon}{u},$$

что, на основаніи § 69, всегда возможно *).

Примѣръ. Дана безконечная геометрическая убывающая прогрессія:

$$\div\ 10;\ 9;\ 8{,}1;\ 7{,}29\ \ldots\ldots\ldots$$

Требуется опредѣлить номеръ члена, начиная съ котораго каждый изъ членовъ прогрессіи будетъ меньше 0,001.

Общій членъ данной прогрессіи:

$$u_{n+1}=10\ .\left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Слѣдовательно, мы должны подобрать для n значеніе, удовлетворяющее неравенству:

$$10\ .\left(\frac{9}{10}\right)^n < 0{,}001,\ \text{ или }\ \left(\frac{9}{10}\right)^n < 0{,}0001.$$

Примѣняя пріемъ, указанный въ § 70, переворачиваемъ обѣ части неравенства, измѣняя его знакъ:

$$\left(\frac{10}{9}\right)^n > 10000,$$

---

*) Такъ какъ $q<1$, то число n, удовлетворяющее этому неравенству, будетъ положительно; какъ бы велико значеніе n ни было, для насъ не имѣетъ значенія, ибо по условію прогрессія *безконечна*.

послѣ чего n найдется изъ формулы (I) § 67:

$$n \geqslant \frac{10000-1}{\frac{10}{9}-1}, \text{ откуда } n \geqslant 89991.$$

Слѣдовательно, начиная съ u_{89992}, каждый изъ членовъ прогрессіи будетъ меньше 0,001.

Въ дѣйствительности для n можно взять значеніе гораздо меньшее (§ 68). Точный подсчетъ при помощи логариѳмическихъ таблицъ показываетъ, что уже, начиная съ u_{88}, требуемое условіе будетъ соблюдено.

84. ТЕОРЕМА. Предѣлъ суммы первыхъ n членовъ убывающей геометрической прогрессіи, при безпредѣльномъ возрастаніи n, равенъ первому члену, раздѣленному на разность между единицей и знаменателемъ прогрессіи.

Пусть

$$\dot{\div}\ u_1, u_2, u_3, u_4 \dots \dots u_n \dots \dots$$

будетъ убывающая геометрическая прогрессія.

Слѣд., численное значеніе ея знаменателя q менѣе единицы.

Сумма первыхъ n членовъ прогрессіи выражается, какъ извѣстно, формулой:

$$S_n = \frac{u_1 - u_n q}{1-q}.$$

Преобразовываемъ это выраженіе такъ:

$$S_n = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_n q}{1-q},$$

откуда

$$\frac{u_1}{1-q} - S_n = u_n \cdot \frac{q}{1-q}.$$

Если предположимъ теперь, что число членовъ n безпредѣльно возрастаетъ, то въ лѣвой части уменьшаемое $\frac{u_1}{1-q}$, какъ независящее отъ n, есть величина постоянная, вычитаемое же S_n есть величина перемѣнная, зависящая отъ n. Въ правой части находится произведеніе:

$$u_n \cdot \frac{q}{1-q}.$$

По предыдущей теоремѣ (§ 83), членъ u_n, при безпредѣльномъ возрастаніи номера его n, можетъ быть сдѣланъ сколь угодно малымъ, множитель же $\frac{q}{1-q}$ есть величина конечная; слѣд., (§ 34) вся правая часть можетъ быть сдѣлана меньше любого, напередъ заданнаго числа ε, какъ бы мало оно ни было.

Итакъ, при безграничномъ увеличеніи n, возможно удовлетворить неравенству:

$$\frac{u_1}{1-q} - S_n < \varepsilon,$$

откуда, на основаніи опредѣленія понятія о предѣлѣ (§ 35), прямо слѣдуетъ, что постоянная величина $\frac{u_1}{1-q}$ есть предѣлъ перемѣнной S_n, т. е.

$$пред.\ (S_n)_{n=\infty} = \frac{u_1}{1-q},$$

что и треб. доказать.

85. Приложеніе предыдущей формулы къ періодическимъ десятичнымъ дробямъ.

Формула предѣла суммы членовъ безконечно убывающей геометрической прогрессіи имѣетъ примѣненіе *при обращеніи періодическихъ дробей въ обыкновенныя.*

Пусть дана, напр., чистая періодическая дробь:

$$0,aaaaa\ldots\ldots,$$

гдѣ a обозначаетъ періодъ, состоящій изъ k цыфръ. Эта дробь можетъ быть разсматриваема, какъ предѣлъ суммы первыхъ n членовъ убывающей геометрической прогрессіи:

$$\div \frac{a}{10^k} + \frac{a}{10^{2k}} + \frac{a}{10^{3k}} + \frac{a}{10^{4k}} + \ldots\ldots,$$

при безграничномъ возрастаніи числа членовъ n

Первый членъ этой прогрессіи $u_1 = \frac{a}{10^k}$; знаменатель $q = \frac{1}{10^k}$, а потому искомый предѣлъ равенъ:

$$\frac{u_1}{1-q} = \frac{a}{10^k} : \frac{10^k-1}{10^k} = \frac{a}{10^k-1}.$$

Но 10^k-1 есть число, состоящее изъ цыфры 9, повторенной k разъ. Отсюда извѣстное изъ Ариѳметики *) **правило:**

Всякая чистая періодическая дробь можетъ быть замѣнена простой дробью, числитель которой равенъ **періоду** *данной дроби, а знаменатель есть цыфра* 9, *повторенная столько разъ, сколько цыфръ* въ **періодѣ.**

86. Если имѣемъ **смѣшанную** періодическую дробь, напр.,

$$0{,}23145454545\ .\ .\ .\ .\ \ \ ,$$

то поступаемъ такъ:

$$0{,}23145454545\ .\ .\ .\ .\ . = \frac{1}{1000}\Big[231{,}454545\ \ .\ .\ .\ .\ .\Big].$$

Но, по только что доказанному, дробь

$$0{,}454545\ .\ .\ .\ .\ \text{имѣетъ предѣломъ}\ \frac{45}{99};$$

слѣд., *пред.* $\Big[\ 0{,}231(45)\ \Big] = \frac{1}{1000}\Big[231 + \frac{45}{99}\Big] =$

$$= \frac{1}{1000}\Big[\frac{231\ .\ (100-1) + 45}{99}\Big] = \frac{23100 + 45 - 231}{99000} =$$

$$= \frac{23145 - 231}{99000},$$

что даетъ извѣстное изъ Ариѳметики **правило** **):

Всякая смѣшанная періодическая дробь можетъ быть замѣнена простой дробью, числитель которой равенъ **разности** *числа, стоящаго между запятой и началомъ* **второго періода** *и числа, стоящаго между запятой и началомъ* **перваго періода**; *знаменатель же равенъ числу, состоящему изъ цыфры* 9, *повторенной столько разъ,* **сколько цыфръ въ періодѣ** *и со столькими* **нулями,** *сколько цыфръ* **до періода.**

---

*) См. напр. „Курсъ теоретич. Ариѳм." сост. П. Шмулевичъ § 148.

**) См. напр. „Курсъ теоретич. Ариѳм." сост. П. Шмулевичъ § 149.

ГЛАВА IX.

.. ТЕОРІЯ СОЕДИНЕНІЙ.

87. Опредѣленія. Различныя группы, составленныя изъ нѣсколькихъ данныхъ предметовъ, и отличающіяся одна отъ другой или самими предметами, или только порядкомъ ихъ, называются, вообще, *соединеніями.*

Предметы, изъ которыхъ составляются соединенія, называются *элементами соединенія* и обозначаются обыкновенно буквами. Такъ, напр., abc есть такое соединеніе изъ трехъ элементовъ, гдѣ на первомъ мѣстѣ стоитъ элементъ a, на второмъ—элементъ b, и на третьемъ—c.

Соединенія раздѣляются на 2 класса:

I. *Соединенія, въ которыхъ порядокъ элементовъ принимается во вниманіе,* такъ что 2 соединенія считаются различными, если отличаются другъ отъ друга или порядкомъ элементовъ, или самими элементами, или тѣмъ и другимъ вмѣстѣ. Такого рода соединенія называются **размѣщеніями** (arrangements), и въ частномъ случаѣ (§ 89) **перестановками** (permutations).

II. *Соединенія, въ которыхъ порядокъ расположенія элементовъ не играетъ никакой роли,* такъ что 2 соединенія считаются различными только тогда, если отличаются другъ отъ друга по крайней мѣрѣ хоть однимъ элементомъ. Такого рода соединенія называются **сочетаніями** (combinaisons).

Если въ *каждой изъ группъ*, образующихъ соединенія, **всѣ** *элементы различны*, то такія группы представляютъ *соединенія безъ повтореній*; если же въ числѣ составленныхъ группъ будутъ встрѣчаться и такія, въ которыхъ нѣкоторые, или всѣ элементы одинаковы, то такія группы представляютъ *соединенія съ повтореніями.*

Въ дальнѣйшемъ займемся указаніемъ *способа составленія соединеній всѣхъ видовъ безъ повтореній и опредѣленіемъ числа ихъ.*

РАЗМѢЩЕНІЯ (ARRANGEMENTS).

88. **Число всѣхъ размѣщеній**, которыя можно получить, если брать изъ n данныхъ элементовъ каждый разъ по k, (гдѣ $k \leqslant n$), будемъ обозначать знакоположеніемъ A_n^k, причемъ нижній указатель съ правой стороны буквы A показываетъ число *всѣхъ* данныхъ элементовъ, а верхній указатель— число элементовъ, *входящихъ въ каждое изъ размѣщеній.*

Пусть будутъ

$$a, b, c, d \ldots . g, h, i$$

данные n элементовъ.

Число размѣщеній, которыя можно составить изъ этихъ n элементовъ, беря каждый разъ по одному, будетъ, очевидно, равно числу элементовъ, т. е.

$$A_n^1 = n \ldots . (1).$$

Для того, чтобы составить размѣщенія второго порядка, т. е. содержащія по 2 элемента каждое, поступаемъ такъ: *беремъ поочередно каждую изъ n буквъ*

$$a, b, c, d \ldots \ldots g, h, i$$

и приписываемъ къ ней справа поочередно каждую изъ остальныхъ (n—1) *буквъ.* Такимъ образомъ составимъ таблицу:

$$\begin{array}{l}
ab,\ ba,\ ca,\ da \ldots\ldots ha,\ ia \\
ac,\ bc,\ cb,\ db \ldots\ldots hb,\ ib \\
ad,\ bd,\ cd,\ dc \ldots\ldots hc,\ ic \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
ah,\ bh,\ ch,\ dh \ldots\ldots hg,\ ig \\
ai,\ bi,\ ci,\ di \ldots\ldots hi,\ ih.
\end{array}$$

Чтобы доказать, что въ составленной такимъ образомъ таблицѣ заключаются дѣйствительно 1) **всѣ** размѣщенія изъ n элементовъ по 2, и что 2) **ни одно изъ нихъ не встрѣчается болѣе одного раза**, т. е. что **таблица не заключаетъ ни пропусковъ, ни повтореній,** поступаемъ такъ:

1) Возьмемъ какое-нибудь изъ *возможныхъ* размѣщеній, напр., *de*, и докажемъ, что оно непремѣнно встрѣтится въ этой таблицѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, для составленія вертикальныхъ колоннъ мы брали поочереди *каждую* изъ данныхъ буквъ, слѣд., въ томъ числѣ была взята и буква *d*; справа отъ этой буквы мы ставили поочередно *каждую* изъ остальныхъ буквъ, слѣд., въ томъ числѣ и букву *e*, что и даетъ размѣщеніе *de*. Т. е., таблица наша *не содержитъ пропусковъ*.

2) Разсмотримъ два какія угодно размѣщенія нашей таблицы: они будутъ находиться или въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, и въ такомъ случаѣ будутъ отличаться *послѣдними* буквами, или же будутъ содержаться въ различныхъ вертикальныхъ столбцахъ и будутъ, слѣдов., отличаться другъ отъ друга *по крайней мѣрѣ* первыми буквами. Слѣд., таблица эта *не содержитъ повтореній*. Поэтому убѣждаемся, что въ написанной таблицѣ дѣйствительно находятся **всѣ возможныя размѣщенія, и по одному разу каждое.**

Число этихъ размѣщеній будетъ слѣдующее: вертикальныхъ столбцовъ у насъ имѣется столько, сколько буквъ, или, что одно и то же, сколько размѣщеній изъ n элементовъ по одному; въ каждомъ столбцѣ размѣщеній $n-1$; слѣд., всего число двойныхъ размѣщеній будетъ:

$$A_n^2 = (n-1) \,.\, A_n^1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Если теперь возьмемъ каждое изъ написанныхъ выше размѣщеній второго порядка и припишемъ къ нему поочередно каждую изъ остальныхъ $(n-2)$ буквъ, то получимъ размѣщенія изъ n элементовъ по 3, причемъ, какъ и въ предыдущемъ, нетрудно убѣдиться, что составленная по такому способу таблица не будетъ содержать *ни пропусковъ, ни повтореній*. Итакъ, изъ каждаго двойного размѣщенія получится $(n-2)$ тройныхъ размѣщеній, а слѣд.,

$$A_n^3 = (n-2) \,.\, A_n^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Сравнивая формулу (3) съ формулой (2), мы можемъ подмѣтить общность закона составленія этихъ формулъ, и по аналогіи съ полученными результатами:

$$A_n^2 = (n-1) \,.\, A_n^1$$
$$A_n^3 = (n-2) \,.\, A_n^2$$

можемъ *предположительно* написать:

$$A_n^4 = (n-3) \, . \, A_n^3$$
$$A_n^5 = (n-4) \, . \, A_n^4$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$A_n^k = (n-k+1) \, . \, A_n^{k-1}.$$

Докажемъ, что такое предположенiе справедливо.

Положимъ, что мы по вышеуказанному способу составили таблицу размѣщенiй изъ n элементовъ по $(k-1)$ безъ пропусковъ и безъ повторенiй. Пусть *число* такихъ размѣщенiй будетъ выражаться символомъ A_n^{k-1}.

Беремъ поочередно каждое изъ размѣщенiй такой таблицы порядка $k-1$ и приписываемъ къ нему поочередно же *каждую изъ недостающихъ буквъ*; число такихъ недостающихъ буквъ будетъ

$$n-(k-1)=n-k+1.$$

Гакимъ образомъ мы составимъ таблицу размѣщенiй порядка k, причемъ въ таблицѣ этой будетъ столько вертикальныхъ колоннъ, сколько было размѣщенiй порядка $(k-1)$, т. е. A_n^{k-1}, и въ каждой колоннѣ $(n-k+1)$ размѣщенiе.

Докажемъ, что 1) ни одно изъ размѣщенiй порядка k не пропущено, и 2) ни одно не встрѣчается болѣе одного раза.

1) Возьмемъ какое-либо изъ *возможныхъ* размѣщенiй порядка k и докажемъ, что оно непремѣнно встрѣтится въ составленной таблицѣ. Напр., размѣщенiе изъ k элементовъ

$$bac \; . \; . \; . \; . \; . \; fg.$$

Для составленiя размѣщенiй порядка k мы брали поочередно *каждое* изъ имѣющихся размѣщенiй порядка $(k-1)$, въ которыхъ по нашему допущенiю пропусковъ не было. Слѣд., въ частности было взято и размѣщенiе

$$bac \; . \; . \; . \; . \; . \; f;$$

къ каждому изъ такихъ размѣщенiй мы приписывали поочередно *всѣ* недостающiя буквы, слѣд., въ томъ числѣ и букву g, т. е. непремѣнно получили размѣщенiе

$$bac \; . \; . \; . \; . \; . \; fg,$$

а потому составленная таблица *не имѣетъ пропусковъ*.

2) Сравнивая два какія угодно размѣщенія, найдемъ, что они или находятся въ одной вертикальной колоннѣ, и въ такомъ случаѣ разнятся послѣдними буквами, или же находятся въ различныхъ вертикальныхъ колоннахъ, и въ такомъ случаѣ получены изъ различныхъ размѣщеній (k—1)-го порядка, т. е. различаются *по крайней мѣрѣ* порядкомъ (k—1) первыхъ буквъ.

Итакъ, изъ каждаго размѣщенія порядка (k — 1) получаются (n—k+1) размѣщеній порядка k, т. е.

$$A_n^k=(n-k+1)\,.\,A_n^{k-1}.$$

Такъ какъ эта формула, связывающая A_n^k и A_n^{k-1}, есть формула *общая,* то мы можемъ придавать въ ней k произвольныя цѣлыя значенія отъ 2 до k. Получаемъ:

$$\begin{aligned}
A_n^2&=(n-1)\,.\,A_n^1\\
A_n^3&=(n-2)\,.\,A_n^2\\
A_n^4&=(n-3)\,.\,A_n^3\\
&\ldots\ldots\ldots\\
A_n^{k-1}&=(n-k+2)\,.\,A_n^{k-2}\\
A_n^k&=(n-k+1)\,.\,A_n^{k-1}.
\end{aligned}$$

Перемножая эти равенства почленно, сокращая на неравное нулю произведеніе $A_n^2\,.\,A_n^3\,.\,A_n^4\,.\,.\,.\,.\,.\,A_n^{k-1}$, и замѣчая, что $A_n^1=n$, находимъ общую формулу:

$$A_n^k=n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-k+1), \qquad \text{(I)}$$

откуда слѣдуетъ **ТЕОРЕМА**:

Число размѣщеній изъ n элементовъ по k равно произведенію k послѣдовательно убывающихъ на единицу чиселъ, изъ коихъ первое равно n, т. е. числу всѣхъ данныхъ элементовъ.

88а. Примѣры. 1. Сколько различныхъ пятизначныхъ чиселъ можно образовать изъ цифръ 1, 2,. . . . 9, при условіи, чтобы каждое число не заключало двухъ одинаковыхъ цифръ?

Искомое число равно, очевидно, $A_9^5=9.8.7.6.5=15120$.

2. Сколько различныхъ чиселъ можно составить изъ цифръ 0, 1, 2, 3, 4, если брать любое число цифръ, но чтобы ни въ одномъ числѣ не было одинаковыхъ цифръ?

Если брать сразу всѣ 5 цыфръ, то всего различныхъ пятизначныхъ чиселъ изъ нихъ составить можно столько, сколько возможно сдѣлать размѣщеній изъ 5 элементовъ по 5, т. е. A_5^5. Но отсюда надо, очевидно, исключить всѣ числа, начинающіяся нулемъ, какъ *четырехзначныя*. Такихъ подлежащихъ исключенію чиселъ будетъ столько, сколько можно сдѣлать размѣщеній изъ 4 эл. по 4, т. е. A_4^4.

Итакъ, различныхъ *пятизначныхъ* чиселъ изъ цыфръ 0, 1, 2, 3, 4 можно составить всего: $A_5^5 - A_4^4 = 5.4.3.2.1 - 4.3.2.1 = 96$.

Подобнымъ же образомъ, изъ данныхъ пяти цыфръ можно составить A_5^4 *четырехзначныхъ* чиселъ, изъ коихъ надо исключить всѣ, начинающіяся нулями, какъ *трехзначныя*, каковыхъ будетъ всего A_4^3. Итакъ, различныхъ *четырехзначныхъ* чиселъ изъ данныхъ цыфръ можно составить всего $A_5^4 - A_4^3 = 5.4.3.2 - 4.3.2 = 96$.

Разсуждая совершенно аналогично, найдемъ:

Различныхъ *трехзначныхъ* чиселъ будетъ: $A_5^3 - A_4^2 = 5.4.3 - 4.3 = 48$.

Различныхъ *двузначныхъ* чиселъ: $A_5^2 - A_4^1 = 5.4 - 4 = 16$, и наконецъ, *однозначныхъ* чиселъ будетъ 5 (считая и нуль).

Итого, всего различныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ условію задачи, будетъ

$$96 + 96 + 48 + 16 + 5 = 261.$$

3. Для передачи сигналовъ во флотѣ пользуются 10-ью различными флагами, изображающими каждый опредѣленную цыфру отъ 0 до 9. Требуется опредѣлить, сколько различныхъ чиселъ можно сигнализировать посредствомъ этой системы, употребляя за разъ не больше 4 флаговъ.

Разсуждая такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ, найдемъ, что при помощи четырехъ флаговъ можно подать $(A_{10}^4 - A_9^3)$ сигналовъ; съ тремя флагами $(A_{10}^3 - A_9^2)$ сигналовъ; съ двумя $A_{10}^2 - A_9^1$ и однимъ флагомъ A_{10}^1, а всего

$$A_{10}^4 - A_9^3 + A_{10}^3 - A_9^2 + A_{10}^2 - A_9^1 + A_{10}^1 = 5275 \text{ сигналовъ}.$$

4. Сколько различныхъ словъ можно составить, имѣя 20 согласныхъ и 6 гласныхъ буквъ, если каждое слово

должно заключать 3 согласныхъ и двѣ гласныхъ, причемъ гласныя буквы должны стоять только на второмъ и четвертомъ мѣстахъ?

Число размѣщеній изъ 20 согласныхъ по 3 равно A_{20}^{3}; въ каждомъ изъ такихъ размѣщеній 6 гласныхъ, занимающихъ попарно 2-ое и 4-ое мѣсто, могутъ быть размѣщены A_{6}^{2} различными способами. Такимъ образомъ, изъ каждаго изъ A_{20}^{3} размѣщеній получаются A_{6}^{2} словъ, а потому всего искомыхъ словъ можно составить

$$A_{20}^{3} \,.\, A_{6}^{2} = 20 \,.\, 19 \,.\, 18 \,.\, 6 \,.\, 5 = 205200 \text{ словъ.}$$

ПЕРЕСТАНОВКИ (PERMUTATIONS).

89. Если въ каждомъ размѣщеніи изъ n данныхъ элементовъ участвуютъ **всѣ** *n элементовъ*, то такого рода соединенія называются **перестановками**. Итакъ, *перестановками называются такія соединенія, которыя отличаются другъ отъ друга исключительно* **лишь порядкомъ** *элементовъ*.

Очевидно, что перестановки представляютъ частный случай размѣщеній, когда $k=n$. Поэтому, для составленія перестановокъ можно поступать такъ: составляемъ таблицу размѣщеній изъ n элементовъ по 2; потомъ отъ нихъ переходимъ къ размѣщеніямъ по 3, потомъ по 4 и т. д., пока не дойдемъ до размѣщеній изъ n элементовъ по n. Это и будутъ перестановки.

Для опредѣленія числа ихъ, обозначаемаго знакомъ P_n, достаточно въ выведенной выше формулѣ размѣщеній положить $k=n$. Такимъ образомъ найдемъ:

$$P_n = A_n^n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \ldots \,.\, (n-1) \,.\, n, \qquad \text{(II)}$$

т. е., **число перестановокъ изъ n элементовъ равно произведенію первыхъ n натуральныхъ чиселъ**.

89a. Примѣры. 1. Сколькими способами можно усадить 6 человѣкъ за столомъ?

Искомое число равно, очевидно, числу перестановокъ изъ 6 элементовъ, т. е. $P_6 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 = 720$.

2. Изъ первыхъ восьми буквъ русскаго алфавита составлены всѣ возможныя перестановки. Сколько изъ нихъ начинаются буквами **аб**?

Такъ какъ каждая изъ требуемыхъ перестановокъ должна начинаться тѣми же буквами **аб**, то другъ отъ друга эти перестановки могутъ отличаться только лишь *порядкомъ* остальныхъ шести буквъ, а потому, сдѣлавши изъ буквъ *в*, *г*, *д*, *е*, *ж*, *з* всѣ перестановки, какія только возможны, и приписавъ въ началѣ каждой изъ нихъ буквы **аб**, получимъ всѣ требуемыя соединенія, число которыхъ, слѣдовательно, равно $P_6 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 = 720$.

3. Изъ шести буквъ A, B, C, x, y, z, сколько можно сдѣлать перестановокъ 1) начинающихся съ большой буквы и 2) начинающихся и кончающихся большой буквой?

1) Помѣщая на первомъ мѣстѣ одну изъ большихъ буквъ, напр. A, можно изъ остальныхъ пяти буквъ сдѣлать P_5 перестановокъ и приписывать ихъ поочередно къ A. Такимъ образомъ, возможно составить всего $P_5 = 1.2.3.4.5 =$ $= 120$ перестановокъ, начинающихся буквой A. Столько же можно сдѣлать перестановокъ, начинающихся буквами B и C. Итого, всѣхъ перестановокъ, въ которыхъ на первомъ мѣстѣ стоятъ большія буквы, возможно сдѣлать $3 \,.\, P_5 = 360$.

2) Изъ трехъ большихъ буквъ A, B, C возможно сдѣлать $3 \,.\, 2 = 6$ размѣщеній по 2. Если же мы размѣстимъ большія буквы въ началѣ и концѣ 6-ью различными способами, то между ними придется вставить остальныя 4 буквы, что возможно продѣлать P_4 способами. Итакъ, искомое число равно произведенію $A_3^2 \,.\, P_4 = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 144$.

90. Можно вывести формулу для опредѣленія числа перестановокъ и непосредственно, не прибѣгая для этого къ формулѣ размѣщеній. Допустимъ, что мы такъ, или иначе, опредѣлили число P_{n-1} и составили всѣ эти перестановки *безъ пропусковъ и безъ повтореній*. Чтобы получить перестановки изъ n буквъ, мы беремъ каждую изъ перестановокъ изъ $(n-1)$ буквы и вводимъ въ нее n-овую букву, напр., r, *на всѣ мѣста, куда ее возможно поставить*, т. е.

1) впереди каждой перестановки изъ $(n-1)$ буквы,
2) въ концѣ каждой перестановки изъ $(n-1)$ буквы,
3) въ каждый изъ $(n-2)$ промежутковъ между $(n-1)$ буквой.

Слѣдовательно, всего на n *различныхъ мѣстъ*.

Такимъ образомъ, мы составимъ **всѣ** перестановки изъ n элементовъ **безъ пропусковъ и безъ повтореній**. Въ самомъ дѣлѣ, 1) напр., перестановка $bcra \ldots\ldots hi$ изъ n буквъ будетъ получена изъ имѣвшейся перестановки $bca \ldots\ldots hi$ изъ $(n-1)$ буквы, въ которой n-овая буква r стоитъ на третьемъ мѣстѣ, т. е. составленная такимъ образомъ таблица *не содержитъ пропусковъ*. 2) Она не будетъ содержать *и повтореній*, ибо каждое изъ полученныхъ такимъ путемъ соединеній будетъ отличаться отъ другого, или порядкомъ $(n-1)$ первоначально взятыхъ буквъ, или же мѣстомъ, которое занимаетъ n-овая буква r.

Итакъ, изъ каждой перестановки изъ $(n-1)$ буквы получаются n перестановокъ по n буквъ *), а потому имѣемъ *общую* зависимость:

$$P_n = n \cdot P_{n-1}.$$

Давая въ этой формулѣ значку n значенія отъ 2 до n, получаемъ:

$$P_2 = 2P_1;\; P_3 = 3P_2;\; P_4 = 4P_3; \ldots\ldots P_n = nP_{n-1}.$$

Перемноживъ эти равенства, сокративъ обѣ части на неравнаго нулю общаго множителя

$$P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot \ldots\ldots P_{n-1},$$

и замѣчая, что $P_1 = 1$, находимъ:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots\ldots (n-1) \cdot n.$$

Замѣчаніе. Произведеніе первыхъ n натуральныхъ чиселъ носитъ особое названіе **факторіала** n и обозначается часто знакомъ $(n!)$, такъ что предыдущій результатъ можно написать такъ:

$$P_n = n!$$

СОЧЕТАНІЯ (COMBINAISONS).

91. Сочетаніями *называются такія соединенія, изъ коихъ каждыя два отличаются другъ отъ друга* **по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ,** *причемъ порядокъ элементовъ не играетъ никакой роли.*

Для составленія таблицы, содержащей всѣ сочетанія изъ n элементовъ по k, можно поступить двоякимъ образомъ: 1) или выписать по вышеуказанному способу всѣ

---

*) Такъ какъ выше показано, что новая буква можетъ занимать n различныхъ мѣстъ.

размѣщенія изъ n элементовъ по k, и потомъ тѣ размѣщенія, которыя отличаются другъ отъ друга лишь *порядкомъ* расположенія элементовъ, зачеркнуть всѣ, кромѣ какого либо одного изъ нихъ. Или же

2) Поступаемъ такъ: выписываемъ всѣ данныя буквы въ какомъ угодно порядкѣ, и для составленія сочетаній по два беремъ каждую букву, кромѣ послѣдней, и приписываемъ къ ней поочередно **каждую изъ слѣдующихъ по порядку за ней.** Для составленія сочетаній по 3, беремъ каждое изъ имѣющихся уже сочетаній по 2, кромѣ тѣхъ, которыя содержатъ послѣднюю букву, и приписываемъ послѣдовательно каждую изъ слѣдующихъ по порядку буквъ и т. д.

Не трудно убѣдиться, что какъ при первомъ, такъ и при второмъ способѣ составленія получаются дѣйствительно *всѣ сочетанія безъ пропусковъ и безъ повтореній.*

92. Для опредѣленія **числа сочетаній** изъ n элементовъ по k, обозначаемаго символомъ C_n^k, докажемъ **теорему:**

Число размѣщеній изъ n элементовъ по k равно числу сочетаній изъ n элементовъ по k, умноженному на число перестановокъ изъ k элементовъ, т. е. $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

Допустимъ, что мы составили таблицу сочетаній изъ n элементовъ по k; число такихъ сочетаній обозначимъ знакомъ C_n^k. Беремъ каждое изъ такихъ сочетаній, содержащее k элементовъ, и дѣлаемъ въ немъ всевозможныя перестановки. Изъ каждаго сочетанія получится, слѣд., P_k перестановокъ. Такимъ образомъ мы получимъ таблицу *нѣкоторыхъ* неизвѣстнаго пока типа соединеній, содержащую $C_n^k \cdot P_k$ членовъ. Докажемъ, что эта таблица будетъ содержать въ себѣ не что иное, какъ *всѣ размѣщенія* изъ n элементовъ по k безъ пропусковъ и безъ повтореній.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какой угодно членъ изъ группы *возможныхъ* размѣщеній изъ n элементовъ по k, напр., $bcd \ldots ia$. Въ имѣющейся у насъ таблицѣ сочетаній изъ n элементовъ по k непремѣнно найдется членъ, содержащій всѣ тѣ же буквы $b, c, d \ldots\ldots\ldots i, a$, расположенныя, быть можетъ, въ другомъ порядкѣ, но мы въ каждомъ, а слѣд., и въ разсматриваемомъ членѣ таблицы C_n^k, сдѣлали *всевозможныя перестановки*, а потому должны были непремѣнно получить и членъ $bcd\ldots\ldots ia$. Итакъ, таблица эта не содержитъ пропусковъ. Въ ней нѣтъ и повтореній, ибо, взявъ изъ нея любые два члена, мы увидимъ, что или они получены изъ двухъ различныхъ сочетаній, а потому отличаются другъ отъ друга *по крайней мѣрѣ одной буквой*, или же оба они получены изъ одного и того-же сочетанія, но тогда отличаются *порядкомъ буквъ*. Итакъ, составивъ таблицу всевозможныхъ сочетаній изъ n элементовъ по k, и сдѣлавъ въ каждомъ членѣ такой таблицы всевозможныя перестановки изъ k элементовъ, мы получили новую таблицу, содержащую *всѣ размѣщенія* изъ n элементовъ по k безъ пропусковъ и безъ повтореній, а потому теорема доказана, т. е.

$$A_n^k = C_n^k \,.\, P_k.$$

Изъ этого равенства получаемъ:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,k} \;\ldots\ldots\; \text{(III)}.$$

Примѣчаніе. Такъ какъ число C_n^k по самому своему существу есть число непремѣнно цѣлое, то изъ этой формулы непосредственно слѣдуетъ:

Произведеніе k послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на произведеніе k первыхъ чиселъ.

92а. Примѣры. 1. Въ обществѣ, состоящемъ изъ 20 членовъ, выбираютъ президіумъ изъ трехъ лицъ; сколькими способами этотъ президіумъ можетъ быть составленъ?

Такъ какъ одинъ составъ президіума долженъ отличаться отъ другого по крайней мѣрѣ однимъ лицомъ, то искомое число есть, очевидно, число *сочетаній* изъ 20 элементовъ по 3, т. е. оно равно $C_{20}^3 = \dfrac{20\,.\,19\,.\,18}{1\,.\,2\,.\,3} = 1140.$

2. Акціонерное общество, состоящее изъ 40 купцовъ, 30 техниковъ, 20 адвокатовъ и 10 врачей, желаетъ выбрать изъ своей среды коммиссію, въ составъ которой вошли бы 4 купца, 3 техника, 2 адвоката и 1 врачъ. Сколькими способами можетъ быть составлена эта коммиссія?

Такъ какъ изъ 40 купцовъ въ коммиссію должны войти 4 человѣка, то число возможныхъ комбинацій при выборѣ ихъ равно числу сочетаній изъ 40 элементовъ по 4, т. е. равно C_{40}^4.

Подобнымъ же образомъ, при выборѣ трехъ техниковъ изъ 30 возможны C_{30}^3 комбинацій, 2 адвоката изъ 20 могутъ быть выбраны C_{20}^2 способами, и избраніе одного врача изъ 10 возможно C_{10}^1 способами.

Такъ какъ при этомъ всѣ избранія *независимы одно отъ другого*, т. е. для одного какого нибудь выбора изъ купцовъ возможны C_{30}^3 комбинацій съ техниками, C_{20}^2 комбинацій съ адвокатами и C_{10}^1 съ врачами, то общее число способовъ составленія коммиссіи равно произведенію:

$$C_{40}^4 \cdot C_{30}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_{10}^1 = \frac{40.39.38.37}{1.2.3.4} \cdot \frac{30.29.28}{1.2.3} \cdot \frac{20.19}{1.2} \cdot 10 =$$

$$= 704982460000.$$

3. Сколькими способами можно раздать колоду картъ въ 52 листа между четыремя игроками, сдавая каждому по 13 картъ?

Первому игроку можно сдать карты столькими способами, сколько возможно сдѣлать сочетаній изъ 52 элем. по 13, т. е. C_{52}^{13}.

Изъ оставшихся 39 картъ число возможныхъ сдачъ для второго игрока будетъ C_{39}^{13}.

Изъ оставшихся 26 картъ число возможныхъ сдачъ для третьяго равно C_{26}^{13}.

Наконецъ четвертый игрокъ получаетъ оставшіеся 13 картъ.

Итого, полное число всѣхъ различныхъ сдачъ выразится произведеніемъ:

$$C_{52}^{13} \cdot C_{39}^{13} \cdot C_{26}^{13} \cdot 1 = \frac{52.51.\ldots.40}{1.2.\ldots.13} \cdot \frac{39.38.\ldots.27}{1.2.\ldots.13} \cdot \frac{26.25.\ldots.14}{1.2.\ldots.13} =$$

$$= \frac{1.2.3.\ldots.52}{(1.2.\ldots.13)^4} = \frac{52!}{(13!)^4}.$$

93. Формулу для опредѣленія C_n^k можно получить и непосредственно, не прибѣгая къ формуламъ для A_n^k и P_k. Для этого разсуждаемъ такъ:
Положимъ, что мы имѣемъ n различныхъ элементовъ

$$a, b, c \ldots\ldots h, i$$

и составили изъ нихъ таблицу всевозможныхъ сочетаній по k элементовъ въ каждомъ.

Выпишемъ изъ этой таблицы *отдѣльно* всѣ тѣ сочетанія, которыя содержатъ одну какую нибудь букву, напр., a, и зачеркнемъ эту букву во всѣхъ членахъ послѣдней таблицы. Такимъ образомъ получимъ, очевидно, новую полную таблицу сочетаній изъ $(n-1)$ буквы по $(k-1)$ буквѣ въ каждомъ. Итакъ, *число сочетаній изъ n элементовъ по k, содержащихъ въ себѣ букву a,* равно числу сочетаній изъ $(n-1)$ буквы по $(k-1)$ въ каждомъ, т. е. равно числу C_{n-1}^{k-1}. Также число сочетаній, содержащихъ букву b, будетъ равно числу C_{n-1}^{k-1}; тоже будетъ для буквъ c, d . . . . . , и всякой другой.

Но если мы выпишемъ сперва всѣ сочетанія по k эл., содержащія элементъ a, потомъ всѣ, содержащія b, потомъ всѣ, содержащія c и т. д., то каждое сочетаніе *повторится k разъ*. Дѣйствительно: если мы составимъ, напр., сочетанія по 4, то сочетаніе $abcd$ встрѣтится 4 раза, а именно:

1) въ таблицѣ сочетаній, содержащихъ букву a,
2) » » » » » b,
3) » » » » » c,
4) » » » » » d.

Поэтому, полное число сочетаній изъ n буквъ по k не будетъ равно n разъ взятому числу сочетаній изъ каждой отдѣльной буквы, а будетъ въ k разъ меньше, т. е.

$$C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}.$$

Замѣняемъ въ этой *общей* формулѣ n и k сперва черезъ $(n-1)$ и $(k-1)$; потомъ черезъ $(n-2)$ и $(k-2)$; $(n-3)$ и $(k-3)$ . . . . . и наконецъ черезъ

$$[n-(k-2)] \text{ и } [k-(k-2)].$$

Получаемъ рядъ тождествъ:

$$C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}$$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{n-1}{k-1} \cdot C_{n-2}^{k-2}$$

$$C_{n-2}^{k-2} = \frac{n-2}{k-2} \cdot C_{n-3}^{k-3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$C_{n-k+2}^{2} = \frac{n-k+2}{2} C_{n-k+1}^{1}.$$

Перемножая всѣ эти равенства, сокращая въ произведенiи равные множители, и замѣчая, что

$$C_{n-k+1}^{1} = n-k+1,$$

получаемъ искомую формулу:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots \ldots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots k}.$$

94. Выведенная выше формула числа сочетанiй изъ n элементовъ по k:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots \ldots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots k}$$

можетъ быть представлена въ болѣе удобномъ для практическаго примѣненiя видѣ, а именно: умноживъ числителя и знаменателя на произведенiе

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (n-k),$$

найдемъ:

$$C_n^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots k \cdot 1 \cdot 2 \ldots (n-k)} = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}}. \quad \text{(IV)}.$$

95. СВОЙСТВА СОЧЕТАНIЙ. I. Формула (IV) остается безъ измѣненiя, если въ ней замѣнимъ k черезъ $(n-k)$, такъ какъ числитель отъ этой замѣны не измѣнится, а въ знаменателѣ замѣна эта измѣняетъ одно въ другое произведенiя:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \text{ и } 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-k).$$

Отсюда слѣдуетъ первое свойство сочетанiй:

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

т. е. число сочетанiй изъ n элементовъ по k равно числу сочетанiй изъ n элементовъ по $n-k$.

Напр. $C_{52}^{51}=C_{52}^{1}=52$; $C_{10}^{8}=C_{10}^{2}=45$; $C_{31}^{30}=C_{31}^{1}=31$.

Можно доказать это свойство и простымъ разсужденіемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, выбравъ изъ n элементовъ какіе нибудь k элементовъ, мы составимъ одно изъ сочетаній группы C_n^k; но оставшіяся $(n-k)$ буквъ дадутъ тоже одно сочетаніе группы C_n^{n-k}; очевидно, что всякому сочетанію изъ группы C_n^k будетъ соотвѣтствовать одно сочетаніе изъ группы C_n^{n-k}, а потому число членовъ въ обѣихъ группахъ будетъ одинаковое, т. е. $C_n^k=C_n^{n-k}$.

II. Число сочетаній изъ n элементовъ по k равно числу сочетаній изъ $(n-1)$ элемента по k, сложенному съ числомъ сочетаній изъ $(n-1)$ элемента по $(k-1)$, т. е.

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ (IV) имѣемъ:

$$C_{n-1}^k=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(n-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-k-1)}$$

и

$$C_{n-1}^{k-1}=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(n-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(k-1)\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-k)}.$$

Складывая, получимъ:

$$C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(k-1)\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-k-1)}\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right]$$

Но

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}=\frac{n}{k(n-k)},$$

а потому,

$$C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(n-1)n}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(k-1)\,.\,k\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-k-1)(n-k)}=C_n^k.$$

Можно это доказать и разсужденіемъ: въ самомъ дѣлѣ, всѣ сочетанія изъ n элементовъ по k можно разбить на двѣ группы: 1) на сочетанія, не содержащія одного какого либо элемента, напр., a, и 2) сочетанія, содержащія a. Первая группа содержитъ, очевидно, всѣ сочетанія изъ $(n-1)$ элемента по k, и число ихъ будетъ C_{n-1}^k; сочетанія же второй группы можно получить, составивъ сочетанія изъ $(n-1)$ элементовъ по $(k-1)$ и приписавъ къ каждому изъ нихъ букву a; слѣд., число сочетаній второй группы будетъ C_{n-1}^{k-1}, а потому,

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}.$$

II. ВОЗРАСТАНІЕ КОЭФФИЦІЕНТОВЪ БИНОМА НЬЮТОНА ДО СЕРЕДИНЫ РАЗЛОЖЕНІЯ.

96. Общимъ членомъ бинома Ньютона называется, какъ извѣстно, тотъ членъ, которому предшествуютъ k членовъ. Если мы имѣемъ разложеніе $(x+a)^n$, то общій членъ имѣетъ видъ:

$$u_{k+1} = C_n^k \,.\, x^{n-k} \,.\, a^k,$$

или, замѣнивъ C_n^k по формулѣ (IV):

$$u_{k+1} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,n}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-k)} \cdot x^{n-k} \,.\, a^k \quad (1).$$

Изъ этой формулы *) могутъ быть получены послѣдовательно всѣ, *кромѣ перваго*, члены разложенія $(x+a)^n$; стоитъ только вмѣсто k подставлять числа 1, 2, 3 . . . n. Первый же членъ изъ этой формулы получить нельзя, ибо если $u_{k+1}=u_1$, то $k=0$ и, слѣдовательно, произведеніе $1.2.3\ldots k$, при $k=0$, теряетъ всякій смыслъ.

Можно, впрочемъ, зная, что коэффиціентъ при первомъ членѣ разложенія всегда равенъ единицѣ, *условиться* принимать произведеніе 1. 2. 3 . . . k, при $k=0$, за единицу; тогда изъ формулы общаго члена можно получить и первый членъ:

$$u_1 = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n} x^n a^0 = x^n.$$

Подставивъ въ формулу общаго члена $(k-1)$ вмѣсто k, получимъ членъ порядка k:

$$u_k = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(k-1)\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-k+1)} x^{n-k+1} a^{k-1} \quad (2).$$

Раздѣливъ формулу (1) на (2), получаемъ:

$$\frac{u_{k+1}}{u} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x}, \text{ откуда}$$

$$u_{k+1} = u_k \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x}.$$

Но $(n-k+1)$ есть показатель степени при буквѣ x въ членѣ u_k; k есть число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому u_{k+1}, откуда слѣдуетъ извѣстное **ПРАВИЛО**:

---

*) Также общій членъ разложенія $(x-a)^n$ имѣетъ видъ:

$$u_{k+1} = (-1)^k \cdot \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(n-k)} x^{n-k} \,.\, a^k$$

Чтобы получить какой угодно членъ разложенія $(x+a)^n$ изъ предыдущаго, надо коэффиціентъ предыдущаго члена умножить на показателя степени буквы x въ этомъ членѣ и раздѣлить на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому; затѣмъ показателя буквы a увеличить на единицу, а показателя при x уменьшить на единицу.

97. Итакъ, коэффиціентъ любого члена получается изъ предыдущаго коэффиціента умноженіемъ на дробь

$$\frac{n-k+1}{k}.$$

Слѣд., *пока этотъ множитель больше единицы, коэффиціенты возрастаютъ; если онъ равенъ единицѣ, — оба рядомъ стоящіе коэффиціента равны; наконецъ, если онъ меньше единицы,—коэффиціенты убываютъ.*

Чтобы выяснить вопросъ, при какихъ значеніяхъ k множитель $\frac{n-k+1}{k}$ остается больше единицы, рѣшимъ относительно k неравенство

$$\frac{n-k+1}{k}>1.$$

Умножая обѣ части его на положительную величину k, получаемъ:

$$n-k+1>k,\text{ или } n+1>2k,$$

откуда $k<\frac{n+1}{2}$.

Такъ какъ $n+1$ представляетъ *число всѣхъ членовъ* разложенія $(a+x)^n$, то полученный результатъ можно формулировать такъ:

Коэффиціенты бинома возрастаютъ до тѣхъ поръ, пока число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому, меньше половины числа всѣхъ членовъ даннаго разложенія, другими словами, **до середины разложенія.**

97a. Посмотримъ теперь, возможно ли *равенство* двухъ рядомъ стоящихъ коэффиціентовъ разложенія, т. е. можетъ ли множитель $\frac{n-k+1}{k}$ обратиться въ единицу.

Рѣшая съ этой цѣлью уравненіе $\frac{n-k+1}{k}=1$, находимъ $k=\frac{n+1}{2}$.

Такъ какъ k, по природѣ своей, есть число непремѣнно цѣлое, то равенство $k=\frac{n+1}{2}$ возможно только въ томъ случаѣ, если $n+1$ есть четное число, т. е., если n—*нечетное* число.

Итакъ, если степень разложенія бинома **нечетная**, *то коэффиціенты разложенія идутъ возрастая до середины, гдѣ находятся рядомъ* **2 равные** *коэффиціента, большіе всѣхъ остальныхъ.*

При разложеніи же бинома въ **четную** *степень, коэффиціенты идутъ возрастая до середины, гдѣ находится* **одинъ членъ** *съ наибольшимъ коэффиціентомъ.*

ГЛАВА X.

НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ.

98. Опредѣленія. Непрерывной дробью называется выраженіе, состоящее изъ соединенія цѣлаго числа, (которое можетъ быть и нулемъ), съ дробью, у которой знаменатель есть опять цѣлое число съ дробью и т. д., словомъ, выраженіе вида:

$$a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{a_4+\cdots}}}$$

гдѣ a_1, a_2, a_3 . . . и b_1, b_2, b_3 . . . суть цѣлыя числа, изъ коихъ только a_1 можетъ равняться нулю.

Если всѣ числители $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots\ldots = 1$, то такого рода непрерывныя дроби, вида:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}$$

называются *ариѳметическими непрерывными дробями.*

Количества a_1, a_2, $a_3 \ldots\ldots$ называются *неполными частными*; всѣ они—числа цѣлыя и положительныя, причемъ нулю можетъ быть равно только a_1. Дроби $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$, $\frac{1}{a_4}$, $\ldots\ldots$ называются *звеньями* непрерывной дроби. Если число такихъ звеньевъ ограничено, то дробь называется *конечной*, въ противномъ случаѣ—*безконечной.*

Для сокращенія письма, можно изображать непрерывную дробь въ видѣ

$$a_1;\ (a_2,\ a_3,\ a_4 \ldots\ldots).$$

99. Обращеніе всякаго числа въ непрерывную дробь. Возьмемъ произвольное положительное число x, раціональное, или ирраціональное. Каково-бы ни было это x, всегда возможно найти два послѣдовательныхъ натуральныхъ числа a_1 и a_1+1, такихъ, что будетъ удовлетворено неравенство:

$$a_1 \leqslant x < a_1 + 1.$$

Напр., если $x = \sqrt{3}$, то $a_1 = 1$; если $x = 5$, то $a_1 = 5$; если $x = \frac{9}{11}$, то $a_1 = 0$ и т. д

Такъ какъ x содержится между a_1 и a_1+1, то можно предположить, что $x = a_1 +$ нѣкоторая правильная дробь; пусть

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

гдѣ x_1, очевидно, болѣе единицы, а потому также заключено между двумя цѣлыми числами, напр., a_2 и a_2+1; пусть

$$x_1=a_2+\frac{1}{x_2},$$

гдѣ x_2, очевидно, тоже можетъ быть приведено къ виду:

$$x_2=a_3+\frac{1}{x_3}\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{и т. д.}$$

Здѣсь a_1, a_2, a_3 . . . суть **наибольшія цѣлыя числа, заключенныя соотвѣтственно въ** x_1, x_2, x_3 . . . . . , и *потому, очевидно, что только число* a_1 *можетъ быть нулемъ*, всѣ же остальныя числа a_2, a_3, a_4 . . . . по *меньшей мѣрѣ* суть *единицы.*

Предыдущій результатъ можно написать въ видѣ:

$$x=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}},$$

и, слѣдовательно, при помощи такого пріема *всякое число можетъ быть развернуто въ ариѳметическую непрерывную дробь.*

100. ТЕОРЕМА. Всякое СОИЗМѢРИМОЕ число можетъ быть развернуто въ КОНЕЧНУЮ непрерывную дробь, и притомъ только въ одну.

Если данное число—цѣлое, то теорема не требуетъ доказательства, такъ какъ мы можемъ разсматривать всякое цѣлое число, какъ непрерывную дробь *съ однимъ звеномъ.*

Пусть поэтому данное соизмѣримое число выражается *несократимой* *) дробью $\frac{A}{B}$.

Будемъ искать общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ A и B (см. «Ариѳметику» § 61), т. е. дѣлимъ сперва A на B;

*) Предполагая данную дробь *несократимой*, мы нисколько не ограничиваемъ общности доказательства, такъ какъ всякую дробь, приведя къ простѣйшему виду, можно сдѣлать *несократимой*.

пусть частное будетъ a_1 (ясно, что a_1 можетъ равняться и нулю) и остатокъ—r_1 (очевидно, $r_1 < B$). Тогда

$$\frac{A}{B}=a_1+\frac{r_1}{B}=a_1+\frac{1}{\left(\frac{B}{r_1}\right)}.$$

Дѣлимъ теперь B на r_1, и пусть частное будетъ a_2 и остатокъ r_2; тогда

$$\frac{A}{B}=a_1+\frac{1}{\left(\frac{B}{r_1}\right)}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{r_2}{r_1}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}}$$

Продолжая подобное же дѣйствіе далѣе, имѣемъ:

$$\frac{r_1}{r_2}=a_3+\frac{r_3}{r_2}=a_3+\frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)},\text{ т. е.}$$

$$\frac{A}{B}=a_1+\cfrac{}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)}}}.$$

Такъ какъ по условію числа A и B *взаимно-простыя* (ибо дробь $\frac{A}{B}$ несократима), то ихъ общій наибольшій дѣлитель *равенъ единицѣ*, а потому, продолжая вышеуказанныя дѣйствія, мы непремѣнно *дойдемъ до остатка, равнаго единицѣ* *). Пусть этотъ остатокъ будетъ $r_n=1$. Тогда, очевидно, дѣйствіе *закончится*, и мы получимъ *конечную* непрерывную дробь:

$$\frac{A}{B}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{\ddots}{\quad\cdot\;+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{r_{n-1}}}}}}.$$

Чтобы доказать, что развертываніе это даетъ только *единственную* непрерывную дробь, допустимъ обратное.

---

*) См. «Курсъ теорет. Ариѳм.» § 61 и 66

Пусть данное соизмѣримое число x, по предыдущему способу, развернулось въ конечную непрерывную дробь:

$$x=a_1;\ (a_2,\ a_3,\ a_4\ .\ .\ .\ .\ a_n). \qquad (1).$$

Допустимъ, что какимъ-либо инымъ способомъ оказалось возможнымъ найти для x еще другое разложенiе въ непрерывную дробь, напр.,

$$x=\alpha_1;\ (\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\ .\ .\ .\ .\ \alpha_k). \qquad (2).$$

Нетрудно убѣдиться, что эти результаты тождественны. Въ самомъ дѣлѣ, равенство (1) показываетъ, что x заключено между двумя цѣлыми числами a_1 и a_1+1; равенство (2) говоритъ, что то-же самое число x заключено между цѣлыми числами α_1 и α_1+1; очевидно, это возможно только тогда, если $a_1=\alpha_1$. Далѣе представляемъ равенства (1) и (2) въ видѣ:

$$\frac{1}{x-a_1}=a_2;\ (a_3,\ a_4\ .\ .\ .\ .\ a_n), \qquad (3).$$

$$\frac{1}{x-\alpha_1}=\alpha_2;\ (\alpha_3,\ \alpha_4\ .\ .\ .\ .\ \alpha_k). \qquad (4).$$

Лѣвыя части послѣднихъ равенствъ равны, а потому цѣлыя части этихъ непрерывныхъ дробей, т. е. a_2 и α_2, тоже равны. Такимъ же образомъ докажемъ, что $a_3=\alpha_3$, $a_4=\alpha_4$ . . . и т. д.

101. Изъ предыдущаго слѣдуетъ **правило:**

Для обращенiя обыкновенной несократимой дроби въ непрерывную, поступаемъ съ числителемъ и знаменателемъ данной дроби такъ, какъ будто отыскиваемъ ихъ общаго наибольшаго дѣлителя по способу послѣдовательнаго дѣленiя; получаемыя при этомъ частныя и будутъ послѣдовательными знаменателями искомой непрерывной дроби.

102. Расположенiе дѣйствiя видно на слѣдующихъ примѣрахъ.

1. Обратить въ непрерывную дробь $\frac{155}{67}$.

Составляемъ таблицу:

	2	3	5	4 . . . . *частныя.*
155	67	21	4	1
134	63	20	4	
21	4	1	0	. . . . *остатки.*

Слѣд., $\frac{155}{67} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$.

2. Обратить въ непрерывную дробь $\frac{239}{577}$.

Составляемъ таблицу:

	0	2	2	2	2	2	2	3 . . . . *частныя.*
239	577	239	99	41	17	7	3	1
0	478	198	82	34	14	6	3	
239	99	41	17	7	3	1	0	. . . . *остатки.*

Слѣд., $\frac{239}{577} = 0$; (2, 2, 2, 2, 2, 2, 3).

3. Обратить въ непрерывную дробь 2,79.

Составляемъ таблицу:

	2	1	3	1	3	5 . . . . *частныя.*
279	100	79	21	16	5	1
200	79	63	16	15	5	
79	21	16	5	1	0	. . . . *остатки.*

Слѣд., 2,79=2; (1, 3, 1, 3, 5).

103. Подходящія дроби. Соединеніе нѣсколькихъ звеньевъ непрерывной дроби

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}$$

со включеніемъ всегда цѣлой части, т. е. выраженія вида:

$$a_1;\ a_1 + \frac{1}{a_2};\ a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} \cdots \cdots,$$

представляющія приближенную величину непрерывной дроби, называются *подходящими дробями*. Слѣдовательно, *подходящей дробью называется то число, которое найдемъ, если остановимъ непрерывную дробь на нѣкоторомъ неполномъ частномъ и вычислимъ полученное приближенное значеніе.*

104. Законъ составленія подходящихъ дробей. Положимъ, дана непрерывная дробь:

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \cdots}}}}}$$

Первую подходящую получимъ, если сохранимъ только цѣлую часть и отбросимъ дробную часть непрерывной дроби.

Итакъ, первая подходящая будетъ a_1.

Для полученія второй подходящей, надо прибавить одно звено непрерывной дроби; вторая подходящая, слѣд., будетъ $a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$.

Для полученія третьей подходящей, надо къ неполному частному a_2 прибавить слѣдующее звено $\frac{1}{a_3}$, т. е. подставить во вторую подходящую дробь величину $\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right)$ вмѣсто a_2; поэтому

$$3\text{-я } \textit{подх.} = \frac{a_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + 1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1}.$$

Сравнивая полученныя значенія подходящихъ дробей:

$$\text{I. } \frac{a_1}{1}; \quad \text{II. } \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}; \quad \text{III. } \frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1},$$

замѣчаемъ, что числитель третьей подходящей получается умноженіемъ $(a_1 a_2 + 1)$, т. е. числителя второй подх., на третье неполное частное (a_3) и прибавленіемъ къ произведенію a_1, т. е. числителя первой подх. Также и знаменатель 3-ьей подх.=знаменателю 2-ой, умноженному на третье неполное частное, *плюсъ* знаменатель 1-ой подходящей.

Слѣд., обозначая числителя каждой подходящей дроби буквой P съ указателемъ, соотвѣтствующимъ *номеру* подходящей, а знаменателя буквой Q съ такимъ же указателемъ, имѣемъ:

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_2 \cdot a_3 + P_1}{Q_2 \cdot a_3 + Q_1}.$$

Докажемъ, что *законъ этотъ общій* и для всѣхъ дальнѣйшихъ подходящихъ.

Допустимъ, что мы имѣемъ 3 послѣдовательныя подходящія дроби:

$$\frac{P_n}{Q_n}; \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}; \quad \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}},$$

причемъ извѣстно, что n-ая подходящая образована изъ двухъ предыдущихъ по слѣдующему закону:

$$P_n = P_{n-1} \cdot a_n + P_{n-2}; \; Q_n = Q_{n-1} \cdot a_n + Q_{n-2} \; \ldots\ldots (1),$$

гдѣ буквой a_n обозначено значеніе n-аго неполнаго частнаго

Такимъ образомъ, по условію имѣемъ:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}\,.\,a_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}\,.\,a_n+Q_{n-2}}\,. \qquad (A).$$

Для того, чтобы получить подходящую дробь порядка $(n+1)$, нужно прибавить слѣдующее звено $\frac{1}{a_{n+1}}$, т. е. замѣнить въ формулѣ (A) неполное частное a_n выраженіемъ $\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)$.

Тогда получаемъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+Q_{n-2}}=$$

$$=\frac{P_{n-1}a_na_{n+1}+P_{n-1}+P_{n-2}a_{n+1}}{Q_{n-1}a_na_{n+1}+Q_{n-1}+Q_{n-2}a_{n+1}}=\frac{(P_{n-1}a_n+P_{n-2})a_{n+1}+P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_n+Q_{n-2})a_{n+1}+Q_{n-1}}.$$

Но стоящія въ скобкахъ выраженія $(P_{n-1}a_n+P_{n-2})$ и $(Q_{n-1}a_n+Q_{n-2})$ на основаніи условія (1) равны P_n и Q_n, а потому имѣемъ окончательно:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_na_{n+1}+P_{n-1}}{Q_na_{n+1}+Q_{n-1}},$$

т. е. числитель и знаменатель $(n+1)$-ой подходящей дроби составляются по такому же закону, какъ числитель и знаменатель n-овой подходящей, а потому, если законъ этотъ справедливъ для какой-либо дроби, то онъ справедливъ и для слѣдующей дроби. Но мы видѣли непосредственно, что онъ вѣренъ для 3-ей подходящей, а слѣд., онъ вѣренъ и для четвертой; будучи вѣренъ для 4-ой, онъ вѣренъ и для 5-ой и т. д. Слѣдовательно:

Для составленія подходящей дроби какого угодно порядка, начиная съ третьей, нужно умножить числителя и знаменателя предшествующей подходящей на неполное частное, соотвѣтствующее составляемой дроби, и къ полученнымъ произведеніямъ соотвѣтственно прибавить числителя и знаменателя подходящей дроби двумя порядками ниже.

Примѣчаніе. Если данная непрерывная дробь не имѣетъ цѣлой части, то за первую подходящую берутъ $\frac{0}{1}$.

105. Расположенiе дѣйствiй для нахожденiя подходящихъ дробей удобно вести, какъ показано на слѣдующихъ примѣрахъ.

I. Составить подходящiя непрерывной дроби 2; (3, 5, 4).

2	3	5	4	*неполныя частныя.*
$\frac{2}{1}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{37}{16}$	$\frac{155}{67}$	*подходящiя дроби.*
I	II	III	IV	

Четвертая подходящая $\frac{155}{67}$ представляетъ точное значенiе данной непрерывной дроби.

II. Составить подходящiя непрерывной дроби

0; (1, 1, 2, 3, 2, 1, 4).

0	1	1	2	3	2	1	4	*неполн. частн.*
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{23}{39}$	$\frac{33}{56}$	$\frac{155}{263}$	*подход. дроби.*
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	

Послѣдняя подходящая $\frac{155}{263}$ представляетъ точное значенiе непрерывной дроби.

СВОЙСТВА ПОДХОДЯЩИХЪ ДРОБЕЙ (§§ 106—115).

106. ТЕОРЕМА I. Разность между двумя подходящими дробями порядковъ n-аго и $(n-1)$-го равна $(-1)^n$, раздѣленной на произведенiе знаменателей этихъ подходящихъ, т. е.

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{Q_n \cdot Q_{n-1}}.$$

Согласно закону составленiя подходящихъ дробей, имѣемъ:

$$P_n=P_{n-1}\cdot a_n+P_{n-2},$$
$$Q_n=Q_{n-1}\cdot a_n+Q_{n-2}.$$

Умножая первое равенство на Q_{n-1}, второе на P_{n-1} и вычитая второе изъ перваго, получаемъ:

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = -1 \,.\, (P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}).$$

Умножая обѣ части на $(-1)^n$ и замѣчая, что $(-1)^{n+1}$ и $(-1)^{n-1}$ — одно и то-же *), имѣемъ:

$$(-1)^n[P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}] = (-1)^{n-1}[P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}] \,.$$

Равенство это показываетъ, что количество

$$(-1)^n[P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}]$$

не измѣняетъ своего значенія отъ уменьшенія значка n на единицу. Поэтому, продолжая такое же уменьшеніе и дальше, получаемъ:

$$(-1)^n[P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}] = (-1)^{n-1}[P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}] =$$
$$= (-1)^{n-2}[P_{n-2} Q_{n-3} - Q_{n-2} P_{n-3}] = \ldots = (-1)^2[P_2 Q_1 - Q_2 P_1] \,.$$

Но если непрерывная дробь имѣетъ видъ

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}$$

то $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{a_1}{1}$; $\dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$, т. е. $P_1 = a_1$; $Q_1 = 1$; $P_2 = a_1 a_2 + 1$; $Q_2 = a_2$. Слѣд., выраженіе

$$(-1)^2[P_2 Q_1 - Q_2 P_1] = (-1)^2 [(a_1 a_2 + 1) \,.\, 1 - a_2 \,.\, a_1] = 1.$$

Поэтому $\qquad (-1)^n[P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}] = 1,$

откуда, умножая обѣ части на $(-1)^n$, имѣемъ:

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на произведеніе $Q_n Q_{n-1}$, получаемъ:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}},$$

что и требовалось доказать.

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, если n—число четное, то $(-1)^{n+1} = -1$, и $(-1)^{n-1} = -1$; если же n—нечетное, то $(-1)^{n+1} = +1$ и $(-1)^{n-1} = +1$.

107. ТЕОРЕМА II. Всякая подходящая дробь, составленная по вышеуказанному закону, есть дробь несократимая.

Въ самомъ дѣлѣ, мы только что имѣли:

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{Q_nQ_{n-1}},$$

откуда
$$P_nQ_{n-1}-Q_nP_{n-1}=(-1)^n.$$

Если мы предположимъ, что числа P_n и Q_n имѣютъ общаго дѣлителя k, такъ что $P_n=ak$; $Q_n=bk$, то, раздѣливъ имѣющееся равенство на k, приходимъ къ абсурду:

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=\frac{(-1)^n}{k},$$

т. е., что разность двухъ цѣлыхъ чиселъ равна дроби.

108. ТЕОРЕМА III. Если число x развернуто въ непрерывную дробь и составлены подходящія дроби, то число x заключено между двумя послѣдовательными подходящими, и ближе къ той, порядокъ которой выше.

Пусть мы имѣемъ нѣкоторое число x, развернутое въ непрерывную дробь, такъ что

$$x=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}+\cfrac{1}{a_{n+2}+\cdots}}}}}}$$

и составили подходящія дроби:

$$\frac{P_1}{Q_1};\ \frac{P_2}{Q_2};\ \frac{P_3}{Q_3}\ldots\ldots\frac{P_n}{Q_n};\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\ldots\ldots$$

Возьмемъ подходящую дробь порядка $(n+1)$. На основанiи вышеизложеннаго закона составленія подходящихъ дробей можемъ написать:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_na_{n+1}+P_{n-1}}{Q_na_{n+1}+Q_{n-1}}.$$

Если въ правую часть этого равенства вмѣсто неполнаго частнаго a_{n+1} подставимъ y, причемъ

$$y = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+3}} + \ldots, \qquad (1)$$

т. е. a_{n+1} *со всѣми остальными* звеньями, то получимъ, очевидно, уже **точное значеніе** непрерывной дроби:

$$x = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}}. \qquad (2).$$

Какъ видно изъ равенства (1), y есть число, больше единицы (такъ какъ a_{n+1} *по меньшей мѣрѣ*$=1$).

Рѣшая уравненіе (2) относительно y, находимъ:

$$y = \frac{P_{n-1} - xQ_{n-1}}{xQ_n - P_n},$$

а умноживъ обѣ части этого равенства на $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$, получаемъ:

$$y \cdot \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x}{x - \frac{P_n}{Q_n}}. \qquad (3).$$

Принявъ во вниманіе, что лѣвая часть равенства (3) есть число положительное, видимъ, что

$$\text{или } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x > 0 \text{ и } x - \frac{P_n}{Q_n} > 0, \text{ т. е. } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > x > \frac{P_n}{Q_n},$$

$$\text{или же } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x < 0 \text{ и } x - \frac{P_n}{Q_n} < 0, \text{ т. е. } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < x < \frac{P_n}{Q_n},$$

а это и доказываетъ, что число x *заключено между двумя рядомъ стоящими подходящими.*

Кромѣ того, лѣвая часть того-же равенства (3) есть число, большее единицы, ибо $Q_n > Q_{n-1}$, (что слѣдуетъ прямо изъ способа составленія подходящихъ), и $y > 1$.

Поэтому и правая часть представляетъ *неправильную дробь*, т. е.

$$\textit{числ. знач}\left[\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-x\right]>\textit{числ. знач.}\left[x-\frac{P_n}{Q_n}\right],$$

а потому число x *ближе подходитъ къ подходящей дроби порядка n, чѣмъ къ дроби порядка* $(n-1)$.

109. СЛѢДСТВІЕ. Всякая подходящая дробь, четнаго порядка, болѣе точнаго значенія числа x, развернутаго въ непрерывную дробь; всякая подходящая, нечетнаго порядка, менѣе x.

Дѣйствительно, мы знаемъ, что

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{Q_nQ_{n-1}}.$$

При n четномъ разность эта будетъ положительна,
при n нечетномъ » » » отрицательна,
т. е. четная подходящая *больше* нечетной. Число же x, по только что доказанному, заключено между $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; слѣдовательно, при n четномъ

$$\frac{P_n}{Q_n}>x>\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$$

а при n нечетномъ

$$\frac{P_n}{Q_n}<x<\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$$ что и треб. доказать.

110. ТЕОРЕМА IV. Если развернемъ какое ни есть число x въ непрерывную дробь и составимъ подходящія, то численное значеніе разности между числомъ x и подходящей $\frac{P_n}{Q_n}$ менѣе каждаго изъ трехъ слѣдующихъ чиселъ:

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}};\ \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})};\ \frac{1}{Q_n^2}.$$

Дѣйствительно, мы вывели (§ 108), что точное значеніе x заключено между двумя послѣдовательными подходящими; слѣд.,

$$\text{числ. знач.}\left[x-\frac{P_n}{Q_n}\right]<\text{числ. знач.}\left[\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right];$$

но численное значеніе послѣдней разности равно (§ 106)

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}},$$

слѣд.,

$$\text{числ. знач.}\left[x-\frac{P_n}{Q_n}\right]<\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \quad \ldots\ldots, \text{(I)}$$

т. е. **численное значеніе ошибки**, *которую мы дѣлаемъ, если вмѣсто точнаго значенія x беремъ подходящую дробь порядка n*, **меньше единицы, раздѣленной на произведеніе знаменателей этой подходящей и слѣдующей за ней.**

Такъ какъ $Q_{n+1}=Q_n \,.\, a_{n+1}+Q_{n-1}$, гдѣ $a_{n+1}\geqslant 1$, то

$$Q_{n+1}\geqslant Q_n+Q_{n-1}; \text{ слѣдов.}, \ \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}\leqslant\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})},$$

а потому изъ неравенства (I) получаемъ, что и подавно

$$\text{числ. знач.}\left[x-\frac{P_n}{Q_n}\right]<\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})},$$

что даетъ второй, болѣе грубый предѣлъ ошибки, допускаемой нами, если вмѣсто точнаго значенія x беремъ подходящую порядка n.

Наконецъ, такъ какъ $Q_{n+1}>Q_n$, то $Q_{n+1}Q_n>Q^2_n$, а потому $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}<\frac{1}{Q^2_n}$, слѣд. изъ неравенства (I) и подавно

$$\text{числ. знач.}\left[x-\frac{P_n}{Q_n}\right]<\frac{1}{Q^2_n},$$

т. е. ошибка меньше единицы, дѣленной на квадратъ знаменателя данной подходящей.

110а. Пусть нѣкоторое число x развернуто въ непрерывную дробь и составлены подходящія:

$$\frac{P_1}{Q_1};\ \frac{P_2}{Q_2};\ \frac{P_3}{Q_3}\ldots\ldots\frac{P_n}{Q_n};\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\ldots\ldots$$

Имѣемъ тождество:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-x+x-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}},$$

или, принимая во вниманіе только *численныя значенія* разностей:

$$\text{\textit{числ. зн.}}\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-x\right)+\text{\textit{числ. зн.}}\left(x-\frac{P_n}{Q_n}\right)=\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}\quad\ldots\ldots(A).$$

Если бы оба слагаемыя, стоящія въ лѣвой части равенства (A), были бы *равны* между собой, то каждое изъ нихъ равнялось бы *половинѣ* правой части, т. е. $\frac{1}{2Q_n Q_{n+1}}$. Но въ дѣйствительности мы знаемъ (§ 108), что разность $\left(x-\frac{P_n}{Q_n}\right)$ численно больше разности $\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-x\right)$, а потому заключаемъ, что

$$\text{\textit{числ. зн.}}\left(x-\frac{P_n}{Q_n}\right)>\frac{1}{2Q_n Q_{n+1}},$$

т. е. *числ. знач. ошибки, которую мы допускаемъ, беря вмѣсто x подходящую n-аго порядка, больше единицы, дѣленной на удвоенное произведеніе знаменателей взятой подходящей дроби и слѣдующей за ней.*

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что ошибка эта будетъ больше, чѣмъ $\frac{1}{2Q_{n+1}^2}$.

Примѣръ. Пусть дана непрерывная дробь

$$x=2;\ (2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2).$$

Составляемъ подходящія:

$$1)\ \frac{2}{1};\quad 2)\ \frac{5}{2};\quad 3)\ \frac{17}{7};\quad 4)\ \frac{73}{30};\quad 5)\ \frac{236}{97}\ldots\ldots$$

Если взять четвертую подходящую $\frac{73}{30}$ вмѣсто точнаго значенія x, то ошибка будетъ меньше, чѣмъ $\frac{1}{30.97}$ или $\frac{1}{2910}$, но больше, чѣмъ $\frac{1}{2.30.97}$, т. е. больше $\frac{1}{5820}$.

111. *Итакъ, мы видимъ, что взявъ вмѣсто точнаго значенія x подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, мы сдѣлаемъ ошибку, по численному значенію меньшую каждаго изъ трехъ слѣдующихъ чиселъ:*

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}};\quad \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})};\quad \frac{1}{Q^2_n}.$$

Изъ трехъ указанныхъ предѣловъ погрѣшности самый точный есть $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$, но для вычисленія его, необходимо знать знаменателя подходящей дроби, слѣдующей за той, которую мы принимаемъ за приближеніе, что не всегда имѣетъ мѣсто на практикѣ.

Вычисленіе предѣла ошибки по формулѣ

$$\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$$

требуетъ знанія знаменателя предшествующей подходящей дроби. Формула эта мало употребительна.

Наконецъ, предѣлъ $\frac{1}{Q^2_n}$ самый неточный, но въ то-же время самый удобный, ибо онъ требуетъ знанія *только данной подходящей.*

Напр., если мы знаемъ, что нѣкоторая подходящая данной непрерывной дроби есть $\frac{13}{35}$, то можно сказать, что $\frac{13}{35}$ есть приближенное значеніе данной дроби, съ точностью до $\frac{1}{35^2}=\frac{1}{1225}$. Если, кромѣ того, извѣстно, что знаменатель предыдущей дроби есть 17, то можемъ сказать, что $\frac{13}{35}$ точно до $\frac{1}{35(35+17)}=\frac{1}{1820}$. Наконецъ, если извѣстно, что знаменатель слѣдующей подходящей есть 87, то можемъ сказать, что $\frac{13}{35}$ есть значеніе x съ точностью до

$$\frac{1}{35\,.\,87}=\frac{1}{3045}.$$

112. Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что взявъ вмѣсто x подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, мы сдѣлаемъ ошибку, меньшую, чѣмъ $\frac{1}{Q_n{}^2}$. Слѣд., *всегда возможно образовать такую подходящую, которая отличалась бы отъ точнаго значенія x* **менѣе, чѣмъ на данную величину** ε, *сколь бы мало послѣднее ни было.*

Въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы удовлетворить неравенству

$$\textit{числ. знач.}\left(x - \frac{P_n}{Q_n}\right) < \varepsilon,$$

достаточно, чтобы $\frac{1}{Q_n{}^2} \leqslant \varepsilon$, т. е. **надо выбрать Q_n такимъ, чтобы было удовлетворено неравенство:**

$$Q_n \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Если непрерывная дробь, въ которую развернуто x, есть дробь *безконечная*, то, при достаточно большомъ n, этому неравенству удовлетворить возможно всегда, ибо знаменатели

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots Q_n \ldots\ldots$$

растутъ безпредѣльно, что видно непосредственно изъ закона ихъ составленія.

Если же x развертывается въ *конечную* дробь, и знаменатели всѣхъ подходящихъ меньше числа $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, то мы можемъ взять *послѣднюю подходящую*, равную точному значенію непрерывной дроби. Впрочемъ, теорема эта имѣетъ практическое примѣненіе только для дробей безконечныхъ.

113. ЛЕММА. Если несократимая дробь $\frac{a}{b}$ заключена между двумя послѣдовательными подходящими $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, то знаменатель этой дроби b болѣе знаменателя каждой изъ подходящихъ.

Дѣйствительно, если дробь $\frac{a}{b}$ заключена между $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, то разности

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) \text{ и } \left(\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)$$

имѣютъ *одинаковые знаки*, причемъ численное значенiе первой разности менѣе численнаго значенiя второй разности, равнаго $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$, т. е.

$$\textit{числ. знач.}\left(\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)<\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}.$$

Умножая обѣ части на $b \,.\, Q_{n-1}$, получаемъ:

$$\textit{числ. знач.}\ (a\,Q_{n-1}-bP_{n-1})<\frac{b}{Q_n}.$$

Лѣвая часть этого неравенства есть число **цѣлое**, неравное нулю *), а потому и въ правой части

$$b>Q_n, \text{ а слѣд., и подавно, } b>Q_{n-1}.$$

114. ТЕОРЕМА V. Каждая подходящая непрерывной дроби x менѣе отличается отъ x, чѣмъ всякая другая дробь съ меньшимъ знаменателемъ, т. е.

$$\textit{числ. знач.}\left(x-\frac{P_n}{Q_n}\right)<\textit{числ. знач.}\left(x-\frac{a}{b}\right), \text{ если } b<Q_n.$$

Дѣйствительно, если бы несократимая дробь $\frac{a}{b}$ менѣе отличалась отъ x, чѣмъ подходящая $\frac{P_n}{Q_n}$, то она и подавно (§ 108) менѣе отличалась бы отъ x, чѣмъ предшествующая подходящая $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Но число x заключено между $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, а потому и дробь $\frac{a}{b}$ должна бы заключаться между

---

*) Если $(aQ_{n-1}-bP_{n-1})=0$, то $\frac{a}{b}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, что противорѣчитъ условiю.

тѣми-же подходящими, а въ этомъ случаѣ знаменатель b, по предыдущей леммѣ, былъ бы болѣе Q_n. Отсюда слѣдуетъ, что если $b < Q_n$, то дробь $\frac{a}{b}$ **болѣе отличается отъ** x, **чѣмъ подходящая** $\frac{P_n}{Q_n}$.

Примѣчаніе. Послѣдняя теорема выражаетъ очень важное свойство подходящихъ дробей, а именно, что изъ всѣхъ дробей, представляющихъ приближенное значеніе непрерывной дроби съ одинаковой степенью точности, подходящая дробь имѣетъ наименьшій знаменатель, т. е. наиболѣе удобна для пользованія, есть наиболѣе *простая* дробь.

115. ТЕОРЕМА VI. Если какое либо число x **развернуто въ непрерывную дробь, и составлены два ряда подходящихъ дробей — рядъ подходящихъ нечетнаго порядка:**

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_5}{Q_5}, \frac{P_7}{Q_7} \ldots\ldots \qquad (1)$$

и рядъ подходящихъ дробей четнаго порядка:

$$\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}, \frac{P_6}{Q_6}, \frac{P_8}{Q_8} \ldots\ldots, \qquad (2)$$

то первый рядъ есть рядъ возрастающій, причемъ всѣ члены его менѣе x, **второй рядъ есть рядъ убывающій, причемъ всѣ члены его болѣе** x. **Если число** x**—соизмѣримо, то ряды эти заканчиваются; если же** x **— несоизмѣримо, то они продолжаются безконечно и стремятся къ общему предѣлу, равному этому несоизмѣримому числу** x.

Выше было доказано (§ 109), что

$$\frac{P_1}{Q_1} < x; \ \frac{P_3}{Q_3} < x; \ \frac{P_5}{Q_5} < x \ldots\ldots$$

и что (§ 108)

$$x - \frac{P_1}{Q_1} > x - \frac{P_3}{Q_3} > x - \frac{P_5}{Q_5} > \ldots\ldots$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$-\frac{P_1}{Q_1} > -\frac{P_3}{Q_3} > -\frac{P_5}{Q_5} \ldots\ldots, \text{ или}$$

$$\frac{P_1}{Q_1} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_5}{Q_5} \ldots\ldots,$$

т. е., рядъ (1) есть рядъ **возрастающій**, причемъ всѣ члены его менѣе x.

Также можемъ написать:

$$\frac{P_2}{Q_2} > x;\ \frac{P_4}{Q_4} > x;\ \frac{P_6}{Q_6} > x\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{и}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} - x > \frac{P_4}{Q_4} - x > \frac{P_6}{Q_6} - x\ .\ .\ .\ .\ .\ , \text{ откуда}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} > \frac{P_4}{Q_4} > \frac{P_6}{Q_6}\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

т. е. рядъ (2) есть рядъ убывающій, причемъ всѣ члены его болѣе x.

Если x есть число *соизмѣримое,* то одна изъ подходящихъ дробей равна точному значенію x, и слѣд., ряды (1) и (2) *закончатся.*

Если же число x — *несоизмѣримо,* то оно развернется въ *безконечную* непрерывную дробь; въ этомъ случаѣ численныя значенія разностей между соотвѣтственными членами обоихъ рядовъ, равныя (§ 106):

$$\frac{1}{Q_1 \cdot Q_2};\ \frac{1}{Q_3 \cdot Q_4};\ \frac{1}{Q_5 \cdot Q_6};\ \frac{1}{Q_7 \cdot Q_8}\ .\ .\ .\ .\ .$$

могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми, такъ какъ числа Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 . . . . . растутъ безпредѣльно.

Итакъ, ряды (1) и (2) стремятся къ общему предѣлу, и этимъ предѣломъ будетъ именно несоизмѣримое число x, какъ число, *заключенное между числами обоихъ рядовъ* (§ 37).

Нетрудно и непосредственно убѣдиться, что въ случаѣ *безконечности* рядовъ (1) и (2) общій предѣлъ ихъ есть число *непремѣнно несоизмѣримое.* Въ самомъ дѣлѣ, предѣлъ этотъ болѣе всѣхъ чиселъ ряда (1) и менѣе всѣхъ чиселъ ряда (2), т. е. заключенъ между числами обоихъ рядовъ. Если бы этотъ предѣлъ былъ соизмѣримымъ числомъ, равнымъ напр., несократимой дроби $\frac{A}{B}$, то, на основаніи леммы § 113, знаменатель этой дроби B долженъ былъ бы быть болѣе каждаго изъ знаменателей

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \ .\ .\ .\ Q_n\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

что невозможно, такъ какъ знаменатели эти, при безграничномъ увеличеніи n, возрастаютъ безконечно.

ГЛАВНЫЯ ПРИЛОЖЕНІЯ НЕПРЕРЫВНЫХЪ ДРОБЕЙ (§§ 116—118б).

116. Разложеніе квадратнаго корня въ непрерывную дробь. Положимъ, напр., требуется разложить въ непрерывную дробь $\sqrt{11}$. Для этого разсуждаемъ такъ же, какъ въ § 99.

Такъ какъ $\sqrt{11}$ заключается между 3 и 4, то, обозначивъ буквой x число, большее единицы, можно положить, что

$$\sqrt{11}=3+\frac{1}{x}, \text{ откуда } x=\frac{1}{\sqrt{11}-3}=\frac{\sqrt{11}+3}{2}.$$

Такъ какъ числитель $\sqrt{11}+3$ содержится между 6 и 7, то, обозначивъ буквой x_1 число, большее единицы, можно положить, что

$$x=\frac{\sqrt{11}+3}{2}=3+\frac{1}{x_1}, \text{ откуда } x_1=\frac{2}{\sqrt{11}-3}=\sqrt{11}+3.$$

Такъ какъ сумма $\sqrt{11}+3$ заключена между 6 и 7, то, обозначивъ буквой x_2 число, большее единицы, можно положить, что

$$x_1=\sqrt{11}+3=6+\frac{1}{x_2}, \text{ откуда } x_2=\frac{1}{\sqrt{11}-3}.$$

Но прежде мы имѣли, что

$$x=\frac{1}{\sqrt{11}-3},$$

а потому заключаемъ, что $x_2=x$.

Слѣд., мы теперь находимся въ тѣхъ же самыхъ условіяхъ, какъ и раньше, а потому всѣ дальнѣйшія величины x_3, x_4, x_5 . . . . . будутъ послѣдовательными повтореніями x и x_1. Итакъ, $\sqrt{11}$ разлагается въ *періодическую* непрерывную дробь:

$$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+}}}}\;.\;.\;.$$

Примѣры. Разложить въ непрерывныя дроби слѣдующіе квадратные корни:

1. $\sqrt{6}$ *Отв.* 2; (2, 4, 2, 4, 2, 4 . . . . . .).
2. $\sqrt{13}$ *Отв.* 3; (1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6. . . . .)
3. $\sqrt{7}$ *Отв.* 2; (1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4 . . . . . .).
4. $\sqrt{41}$ *Отв.* 6; (2, 2, 12, 2, 2, 12 . . . . . .).
5. $\sqrt{31}$ *Отв.* 5; (1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1, 3, 5. . .)
6. $\sqrt{23}$ *Отв.* 4; (1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8 . . . . . .).
7. $\frac{3+\sqrt{57}}{4}$ *Отв.* 2; (1, 1, 1, 3, 7, 3, 1, 1, 1, 3, 7, 3. . . .).
8. $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ *Отв.* 4; (3, 3, 3 . . . . . .).
9. $\sqrt{a^2+1}$ *Отв.* a; ($2a$, $2a$, $2a$, $2a$ . . . . . .).
10. $\sqrt{a^2+2a}$ *Отв.* a; (1, $2a$, 1, $2a$, 1, $2a$ . . . . . .).

117. Иногда требуется извлечь при помощи непрерывныхъ дробей квадратный корень съ точностью, не менѣе заданной. Въ этомъ случаѣ, подобно предыдущему, производятъ разложеніе корня въ непрерывную дробь и составляютъ послѣдовательныя подходящія до тѣхъ поръ, пока знаменатель одной изъ нихъ не удовлетворитъ условію, выведенному въ § 112.

Пусть, напр., требуется найти $\sqrt{\frac{7}{11}}$ съ точностью не менѣе $\frac{7}{11239}$.

Развертывая $\sqrt{\frac{7}{11}}$ въ непрерывную дробь, получимъ:

$$\sqrt{\frac{7}{11}}=0;\ (1,\ 3,\ 1,\ 16,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 16,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 16\ \ldots).$$

Для того, чтобы какая нибудь изъ подходящихъ отличалась отъ $\sqrt{\frac{7}{11}}$ менѣе, чѣмъ на $\frac{7}{11239}$, надо, чтобы ея знаменатель q удовлетворялъ бы неравенству:

$$q \geqslant \sqrt{\frac{11239}{7}},\ \text{т. е. } q \geqslant 40.$$

Составляя подходящія, получаемъ:

$$\text{I. } \frac{0}{1};\ \text{II. } \frac{1}{1};\ \text{III. } \frac{3}{4};\ \text{IV. } \frac{4}{5};\ \text{V. } \frac{67}{84}.$$

Послѣдняя дробь и будетъ искомая, такъ какъ знаменатель ея $84 > 40$.

Примѣры для упражненій.

При помощи непрерывныхъ дробей вычислить съ точностью, не менѣе указанной, слѣдующіе корни:

1. $\sqrt{8}$ съ точн. до $\frac{1}{35}$. *Отв.* $\frac{17}{6}$.
2. $\sqrt{10}$ съ точн. до 0,001. *Отв.* $\frac{117}{37}$.
3. $\sqrt{17}$ съ точн. до $\frac{1}{4000}$. *Отв.* $\frac{268}{65}$.
4. $\sqrt{26}$ съ точн. до 0,0001. *Отв.* $\frac{515}{101}$.

118. По данной безконечной непрерывной періодической дроби нетрудно опредѣлить **ирраціональность**, изъ *которой она возникла*. Напр., дана дробь:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}$$

Обозначая искомую величину этой дроби буквой x и перенося 2 въ лѣвую часть, имѣемъ:

$$x-2=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}$$

Въ правой части находится безконечная періодическая непрерывная дробь, состоящая *всего изъ двухъ различныхъ* звеньевъ. Къ знаменателю второго звена (4) прилагается безконечная періодическая дробь:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4\ldots\ldots}}}},$$

равная по нашему обозначенію $x-2$. Итакъ:

$$x-2=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+x-2}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}=\frac{2+x}{2x+5}$$

Слѣд., для опредѣленія x имѣемъ уравненіе:

$$x-2=\frac{2+x}{2x+5}, \text{ или: } 2x^2+5x-4x-10=x+2,$$

откуда $$x=+\sqrt{6}.$$

Также $2; (4, 4, 4 \ldots.)=\sqrt{5}; a; (1, 2a, 1, 2a \ldots.)=\sqrt{a^2+2a};$

$$1; (3, 2, 3, 2, 3, 2 \ldots\ldots)=+\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

118a. Вычисленіе логариѳмовъ. Такъ какъ вычисленіе логариѳмовъ при помощи непрерывныхъ дробей на практикѣ никогда не производится, то ограничимся только однимъ примѣромъ, показывающимъ *возможность* этого примѣненія непрерывныхъ дробей.

Пусть, напр., требуется найти log_{10} 200.

На основаніи опредѣленія понятія о логариѳмѣ (§ 78), мы знаемъ, что вопросъ приводится къ рѣшенію относительно x показательнаго уравненія $10^x=200$.

Пробуя для x послѣдовательно числа 0, 1, 2, 3 ....., находимъ для 10^x значенія 1, 10, 100, 1000 .... Такъ какъ 200 содержится между 100 и 1000, то x заключается между 2 и 3, а потому можно принять x равнымъ 2+ *нѣкоторая правильная дробь*:

$$x=2+\frac{1}{y}, \ldots\ldots (1)$$

гдѣ $y>1$. Подставляя это значеніе x въ данное уравненіе, имѣемъ:

$$10^{2+\frac{1}{y}}=200, \text{ или } 10^2 \cdot 10^{\frac{1}{y}}=200, \text{ откуда } 10^{\frac{1}{y}}=2, \text{ или } 2^y=10.$$

Пробуя для y числа 0, 1, 2 ...., видимъ, что y заключается между 3 и 4, такъ что можно положить

$$y=3+\frac{1}{z} \ldots\ldots (2).$$

Слѣдовательно, имѣемъ:

$$2^{3+\frac{1}{z}}=10, \text{ или } 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{z}}=10, \text{ или } 2^{\frac{1}{z}}=\frac{5}{4},$$

что даетъ новое показательное уравненіе:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^z = 2.$$

Путемъ послѣдовательныхъ пробъ убѣждаемся, что

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$$

т. е., что z находится между 3 и 4, такъ что можно принять

$$z = 3 + \frac{1}{v} \ldots\ldots (3).$$

По подстановкѣ получаемъ

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{v}} = 2, \text{ или } \left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{v}} = 2, \text{ или } \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{v}} = \frac{128}{125},$$

$$\text{откуда } \left(\frac{128}{125}\right)^v = \frac{5}{4}.$$

Послѣдовательными подстановками можно убѣдиться, что v заключается между 9 и 10, т. е.

$$v = 9 + \frac{1}{w} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

и т. д.

Изъ равенствъ (1), (2), (3), (4) . . . . имѣемъ:

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \ldots}}}$$

Составляя подходящія дроби, получаемъ:

I. 2; II. $\frac{7}{3}$; III. $\frac{23}{10}$; IV. $\frac{214}{93}$ . . . .

Четвертая подходящая даетъ значеніе искомаго логариѳма съ точностью, во всякомъ случаѣ, не меньше, чѣмъ до $\frac{1}{93^2}$, т. е. съ точностью до $\frac{1}{8649}$.

118б. Еще одно важное приложеніе непрерывныя дроби имѣютъ при рѣшеніи неопредѣленнаго уравненія $ax+by=c$, о чемъ будетъ подробно сказано ниже (§§ 215 и 216).

ГЛАВА XI.

ТЕОРЕМЫ О РАВНОСИЛЬНОСТИ УРАВНЕНІЙ.

119. Опредѣленія. Два количества, соединенныя знакомъ $=$, называются равными и образуютъ *равенство.* Такъ напр., $3+6=2+7$ есть равенство. Общій видъ равенства есть

$$A=B.$$

Количество A, находящееся влѣво отъ знака равенства, называется *лѣвой,* или *первой* частью равенства; количество B называется *правой,* или *второй* частью равенства.

Всякое очевидное равенство называется **тождествомъ.** Напр.,

$$7=2+5;\ 11-1=2+8;\ A=A$$

суть тождества.

Тождествомъ называется также равенство двухъ **буквенныхъ** *выраженій, имѣющее мѣсто* **при всякомъ значеніи буквъ,** *входящихъ въ него.* Такимъ образомъ, равенства

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$a^m\,.\,a^n=a^{m+n};$$

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

суть тождества.

Уравненіемъ *называется равенство, имѣющее мѣсто* **только при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ** *буквъ, входящихъ въ него.* Такъ, напр., равенство

$$7x-3=5x+.$$

есть уравненіе, такъ какъ оно, будучи вѣрнымъ при $x=5$, не имѣетъ мѣста для всякаго другого значенія x, напр., для $x=6$, $x=7$, $x=0$ и т. д.

Тѣ буквы, частныя значенія которыхъ преобразовываютъ уравненіе въ тождество, называются **неизвѣстными** даннаго уравненія. Тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ данное уравненіе въ тождество, называются **рѣшеніями, или корнями** уравненія.

Рѣшить уравненіе значитъ найти его корни.

Выраженіе: *корень удовлетворяетъ уравненію*, обозначаетъ, что по подстановкѣ въ данное уравненіе найденнаго корня вмѣсто неизвѣстнаго, получается тождество.

120. Классификація уравненій.

I. Уравненіе называется *алгебраическимъ*, если надъ неизвѣстными не совершается иныхъ дѣйствій, кромѣ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня.

Въ противномъ случаѣ, уравненіе называется *трансцендентнымъ*.

Напр., уравненія

$$5^x = 7; \quad \sqrt[x]{a} = b$$

суть уравненія трансцендентныя.

II. *По числу неизвѣстныхъ* уравненія раздѣляются: на уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя, тремя и со многими неизвѣстными.

III. Если обѣ части уравненія суть выраженія раціональныя и цѣлыя относительно неизвѣстныхъ, то *степенью уравненія называется сумма показателей степеней неизвѣстныхъ въ томъ членѣ уравненія, въ которомъ эта сумма* **наибольшая**.

Въ зависимости отъ степени, уравненія раздѣляются на уравненія *первой степени*, на уравненія *второй степени, или квадратныя, третьей степени, или кубичныя, четвертой, пятой* и т. д.

Напр., уравненіе

$$x - 5z - 3y = 17 + 2z$$

есть уравненіе *первой* степени съ тремя неизвѣстными.

Уравненіе

$$4x - 5xy + 7z^2y = 3$$

есть уравненіе *третьей* степени, такъ какъ наибольшая сумма показателей при неизвѣстныхъ равна 3 (въ членѣ $7z^2y$).

121. Если нѣсколько неизвѣстныхъ должны удовлетворять одновременно нѣсколькимъ уравненіямъ, то совокупность этихъ уравненій составляетъ, такъ называемую, ***систему совмѣстныхъ уравненій.***

Рѣшить систему нѣсколькихъ уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными значитъ найти значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія **одновременно всѣмъ заданнымъ уравненіямъ.**

122. Два уравненія, заключающія одни и тѣ-же неизвѣстныя, называются **равносильными** (*равнозначными, эквивалентными*), если они имѣютъ одни и тѣ-же рѣшенія, т. е., ***если всѣ корни перваго уравненія удовлетворяютъ второму,*** **и, наоборотъ,** ***всѣ корни второго уравненія удовлетворяютъ первому.***

Очевидно, что при рѣшеніи уравненій мы можемъ замѣнять данное уравненіе другимъ, равносильнымъ ему.

Процессъ рѣшенія заключается, вообще, въ томъ, что при помощи разнаго рода преобразованій приходятъ къ такому уравненію, *равносильному данному*, правая часть котораго есть само неизвѣстное; очевидно, что лѣвая часть такого уравненія и будетъ искомымъ корнемъ.

Производимыя для этого преобразованія основаны на доказанныхъ ниже теоремахъ о равносильности уравненій (§§ 123—136).

122а. Въ дальнѣйшемъ изложеніи теоріи уравненій условимся для удобства письма обозначать *условныя равенства, т. е. уравненія*, знакомъ $=$, а *безусловныя равенства, т. е., тождества*, знакомъ $\equiv$.

Такимъ образомъ, равенство

$$A_x = B_x$$

будетъ обозначать уравненіе, въ которомъ x есть неизвѣстное. Если корень этого уравненія есть $x = a$, то, подставивъ вмѣсто x въ обѣ части значеніе a, получимъ уже *трехчертное* равенство, т. е. тождество:

$$A_a \equiv B_a .$$

123. ТЕОРЕМА I. Если къ обѣимъ частямъ даннаго уравненія прибавимъ, или изъ обѣихъ частей его вычтемъ одно и то-же выраженіе, содержащее неизвѣстныя, или не содержащее ихъ, то получимъ новое уравненіе, равносильное данному.

Пусть данное уравненіе будетъ

$$A_x = B_x \text{ *)} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Если къ обѣимъ частямъ его прибавимъ по C_x, то получится новое уравненіе

$$A_x + C_x = B_x + C_x \;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Требуется доказать, что уравненія (1) и (2) **равносильны**, т. е., что любой корень ур-ія (1) будетъ удовлетворять ур-ію (2) **и, наоборотъ,** любой корень ур-ія (2) будетъ также корнемъ ур-ія (1).

Доказательство. 1°. Пусть $x=a$ будетъ однимъ изъ корней ур-ія (1).

Слѣдовательно, подставивъ въ него a вмѣсто x, получимъ **тождество**:

$$A_a \equiv B_a.$$

Сложивъ почленно обѣ части этого тождества съ **очевиднымъ тождествомъ**:

$$C_a \equiv C_a,$$

получимъ новое **тождество**:

$$A_a + C_a \equiv B_a + C_a \;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Сравнивая послѣднее тождество съ ур-іемъ (2), видимъ, что отъ замѣны буквы x буквою a, ур-іе (2) обращается въ тождество (3), а это и показываетъ, что корень ур-ія (1) $x=a$ есть въ то-же время и корень ур-ія (2).

2°. Пусть теперь $x=\alpha$ есть одинъ изъ корней ур-ія (2). Слѣдовательно, подставляя въ него α вмѣсто x, получимъ **тождество**:

$$A_\alpha + C_\alpha \equiv B_\alpha + C_\alpha.$$

---

*) Если уравненіе содержитъ *нѣсколько неизвѣстныхъ*, напр. x, y, z. . , то оно напишется такъ: $A_{x,\,y,\,z\,.\,.\,.} = B_{x,\,y,\,z\,.\,.\,.}$, причемъ *ходъ* доказательства теоремы нисколько не измѣнится.

Вычитая изъ обѣихъ частей его почленно очевидное тождество

$$C_\alpha \equiv C_\alpha,$$

получимъ новое тождество:

$$A_\alpha \equiv B_\alpha, \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

которое показываетъ, что подстановка значенія α вмѣсто x въ уравненіе (1) обращаетъ это ур-іе въ тождество (4), т. е., что каждый корень ур-ія (2) есть въ то-же время корень ур-ія (1).

Итакъ, теорема доказана, т. е. ур-ія (1) и (2) **равносильны.**

124. Слѣдствіе I. *Любой членъ уравненія можно перенести изъ одной части въ другую, написавъ его въ этой другой части съ обратнымъ знакомъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, если переносимый членъ имѣетъ знакъ (+), то перенесеніе его въ другую часть со знакомъ (—) равносильно отнятію этого члена отъ обѣихъ частей ур-ія; если же онъ имѣетъ знакъ (—), то перенесеніе его со знакомъ (+) равносильно прибавленію его къ обѣимъ частямъ уравненія.

Примѣръ. Дано ур-іе:

$$7-3x=11-5x.$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ его по $5x$, получаемъ:

$$7-3x+5x=11,$$

т. е. видимъ, что членъ $5x$ перешелъ въ другую часть, измѣнивъ знакъ.

Слѣдствіе II. *Можно перемѣнить знаки у всѣхъ членовъ уравненія на обратные.*

Въ самомъ дѣлѣ, перемѣна знаковъ у всѣхъ членовъ уравненія на обратные равносильна перенесенію всѣхъ членовъ ур-ія изъ первой части во вторую и изъ второй части въ первую.

Примѣръ. Дано ур-іе:

$$12-5x=7x-36.$$

Перенеся всѣ члены, имѣемъ:

$$-7x+36=-12+5x.$$

Мѣняя теперь мѣстами обѣ части уравненія, получаемъ:

$$-12+5x=-7x+36.$$

Видимъ, что всѣ члены уравненія измѣнили знаки на обратные.

Слѣдствіе III. *Всякое уравненіе можно привести къ виду* $P_x=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, перенеся всѣ члены изъ второй части въ первую, получимъ въ лѣвой части нѣкоторое выраженіе, содержащее извѣстные и неизвѣстные члены, а въ правой части нуль.

125. Замѣчаніе. Всякое уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, послѣ перенесенія всѣхъ членовъ въ лѣвую часть и приведенія подобныхъ членовъ, имѣетъ видъ

$$ax+b=0,$$

гдѣ a и b суть выраженія, не содержащія x

Это есть, слѣд., *общій видъ уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ*.

Также

$$ax^2+bx+c=0,$$

гдѣ a, b, c, не содержатъ x, есть общій видъ квадратнаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Также

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

есть общій видъ кубичнаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

И, вообще,

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ .\ \ .\ \ .+kx^2+lx+m=0$$

есть общій видъ уравненія n—овой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

126. ТЕОРЕМА II. Если обѣ части уравненія умножить на одно и то-же выраженіе, не равное нулю, не равное безконечности, и не содержащее неизвѣстныхъ, то получится новое уравненіе, равносильное данному.

Пусть дано уравненіе

$$A_x = B_x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и пусть C обозначаетъ какую нибудь конечную *) величину, не содержащую неизвѣстныхъ даннаго уравненія.

Умножая обѣ части даннаго ур-ія на C, получаемъ новое уравненіе

$$A_x \,.\, C = B_x \,.\, C \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Требуется доказать, что уравненія (1) и (2) равносильны.

Замѣняемъ ур-ія (1) и (2) равнозначными имъ по доказанному (§ 124, слѣдствіе III) уравненіями

$$A_x - B_x = 0 \ldots (3) \text{ и } (A_x - B_x) \,.\, C = 0 \ldots (4)$$

и докажемъ, что уравненія (3) и (4) эквивалентны.

Доказательство. 1°. Пусть $x = a$ есть одинъ изъ корней ур-ія (3). Слѣдовательно, подстановка a вмѣсто x даетъ тождество:

$$A_a - B_a \equiv 0.$$

Умножая обѣ части этого тождества на *конечную* по условію величину C, получаемъ новое тождество:

$$(A_a - B_a) \,.\, C \equiv 0 \,.\, C \equiv 0^{**}) \ldots\ldots\ldots (5).$$

Послѣднее тождество показываетъ, что замѣна буквы x буквою a преобразуетъ ур-іе (4) въ тождество (5), т. е. что $x = a$ есть корень ур-ія (4).

2°. Пусть $x = \alpha$ есть одинъ изъ корней ур-ія (4). Слѣдовательно, имѣемъ тождество:

$$(A_\alpha - B_\alpha) \,.\, C \equiv 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

---

*) Т. е., не равную ни нулю, ни безконечности.

**) Произведеніе $0 \,.\, C$ могло бы не равнятъся нулю только въ томъ случаѣ, если бы C равнялось *безконечности*; но по условію C есть величина *конечная*, а потому $0 \,.\, C \equiv 0$.

Произведеніе двухъ множителей можетъ равняться нулю только въ томъ случаѣ, если по крайней мѣрѣ одинъ изъ нихъ равенъ нулю. Но C, по условію не нуль, а потому изъ тождества (6) слѣдуетъ, что

$$A_a - B_a \equiv 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

Послѣднее тождество показываетъ, что уравненіе (3) обращается въ тождество отъ замѣны въ немъ буквы x буквою a, т. е., что $x = a$ есть корень ур-ія (3).

Итакъ, всякій корень ур-ія (3) удовлетворяетъ ур-ію (4) **и, наоборотъ,** всякій корень ур-ія (4) удовлетворяетъ ур-ію (3), т. е. уравненія (3) и (4), а слѣдовательно и равнозначныя имъ ур-ія (1) и (2) **эквивалентны,** что и треб. док.

127. ТЕОРЕМА III. Если умножить обѣ части уравненія на выраженіе, содержащее неизвѣстныя, то получится новое уравненіе, вообще, не равносильное данному.

Пусть дано уравненіе

$$A_x = B_x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Умножая обѣ части его на величину C_x, содержащую неизвѣстныя даннаго уравненія, получаемъ

$$A_x \, . \, C_x = B_x \, . \, C_x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Замѣняемъ ур-ія (1) и (2) равносильными имъ по доказанному (§ 124, слѣдствіе III) уравненіями

$$A_x - B_x = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (3) \text{ и } (A_x - B_x) \, . \, C_x = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Докажемъ, что ур-ія (3) и (4), а слѣдовательно, и равнозначныя имъ ур-ія (1) и (2) **вообще не эквивалентны.**

Доказательство. 1°. Пусть $x = a$ есть одинъ изъ корней ур-ія (3). Слѣдовательно, имѣемъ **тождество:**

$$A_a - B_a \equiv 0.$$

Умножая обѣ части его на C_a, получаемъ равенство:

$$(A_a - B_a) \, . \, C_a = 0 \, . \, C_a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Во второй части этого равенства находится произведеніе $0 \cdot C_a$. Если C_a не равно безконечности, то это произведеніе тождественно равно нулю, и слѣдовательно,

$$(A_a - B_a) \cdot C_a \equiv 0,$$

т. е. *въ этомъ случаѣ* *) корень $x = a$ ур-ія (3) будетъ также и корнемъ ур-ія (4).

Но можетъ оказаться, что подстановка значенія a вмѣсто x въ множитель C_x обратитъ этотъ множитель въ безконечность, т. е., что $C_a = \infty$. Въ этомъ случаѣ произведеніе $0 \cdot C_a$ представляетъ **неопредѣленность**, *истинное значеніе которой можетъ* **и не равняться нулю**, и тогда произведеніе

$$(A_a - B_a) \cdot C_a \neq 0,$$

т. е. корень ур-ія (3) $x = a$ не будетъ удовлетворять ур-ію (4).

Итакъ, мы видимъ, что отъ умноженія на величину, содержащую неизвѣстныя, нѣкоторыя значенія корней могутъ *потеряться*. При этомъ изъ вышеизложеннаго ясно, что этими **потерянными значеніями корней будутъ тѣ значенія неизвѣстнаго, которыя обращаютъ даннаго множителя C_x въ безконечность.**

2°. Пусть $x = a$ есть одинъ изъ корней ур-ія (4). Слѣдовательно, имѣемъ **тождество**:

$$(A_a - B_a) \cdot C_a \equiv 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Если произведеніе двухъ множителей тождественно равно нулю, то, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ нихъ тождественно равенъ нулю, а другой при этомъ не обращается въ безконечность. Итакъ, здѣсь могутъ представиться два случая:

I. Первый множитель равенъ нулю, т. е.

$$A_a - B_a \equiv 0.$$

Сравнивая это тождество съ ур-іемъ (3), видимъ, что въ этомъ случаѣ $x = a$ есть корень этого уравненія.

---

*) При $C_a \neq \infty$.

II. Если же въ тождествѣ (6) равенъ нулю второй множитель, т. е. $C_\alpha \equiv 0$, то первый множитель, т. е. $(A_\alpha - B_\alpha)$, можетъ при этомъ принимать *какія угодно значенія*, кромѣ только безконечности. Если *случайно* окажется, что значеніе $x=\alpha$, обращающее C_α въ нуль, обратитъ и $(A_\alpha - B_\alpha)$ тоже въ нуль, то $x=\alpha$ будетъ корнемъ ур-ія (3). Вообще же, значенія x, обращающія C_x въ тождественный нуль, **не будутъ обращать въ нуль** выраженіе $A_x - B_x$, т. е. **не будутъ служить корнями ур-ія** (3). Такимъ образомъ, корни эти являются **посторонними** (*лишними, паразитными*) для даннаго ур-ія (3).

При этомъ изъ вышеизложеннаго ясно, что этими **посторонними корнями будутъ тѣ значенія неизвѣстнаго, которыя обращаютъ множителя C_x въ нуль.**

128. Примѣры. I. Пусть дано уравненіе

$$x - 2 = 0,$$

имѣющее, очевидно, всего одинъ корень 2. Умножая обѣ части его на $(x-3)$, получаемъ:

$$(x-2)\,.\,(x-3) = 0, \text{ или } x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Рѣшая это квадратное уравненіе, находимъ *два* корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Первый корень удовлетворяетъ данному уравненію; значеніе же $x=3$ есть *посторонній* корень, не удовлетворяющій предложенному уравненію. Этотъ посторонній корень есть именно то значеніе неизвѣстнаго, которое обращаетъ введенный множитель $(x-3)$ въ нуль.

II. Дано ур-іе

$$(x-2)(x+5) = 0.$$

Корни его суть 2 и (—5).

Умножая обѣ части его на $\dfrac{1}{x-2}$, получимъ:

$$x + 5 = 0.$$

Единственный корень этого ур-ія есть $x = -5$.

Слѣд., корень $x=2$ *потерялся*. Это потерянное значеніе корня есть именно та величина x, которая обращаетъ данный множитель $\dfrac{1}{x-2}$ въ безконечность.

III. Дано ур-іе

$$(x-3)^2(x-7)(x+4)=0. \quad (1).$$

Корни его суть: 3, 7, (—4).

Умножая обѣ части его на $\frac{1}{x-3}$, получаемъ:

$$(x-3)(x-7)(x+4)=0. \quad (2).$$

Корни его суть: 3, 7, (—4), т. е. тѣ-же, что и корни ур-ія (1), такъ что ур-іе (2) равносильно ур-ію (1). Это происходитъ оттого, что множитель $\frac{1}{x-3}$, хотя и обращается въ безконечность при $x=3$, *но истинная форма неопредѣленности*

$$\left[\frac{1}{x-3}(x-3)^2(x-7)(x+4)\right]$$

при $x=3$, *равна нулю*, что видно непосредственно, по сокращеніи даннаго выраженія на $(x-3)$.

IV. Дано уравненіе

$$x^2-3x+2=0,$$

имѣющее корни $x_1=1$ и $x_2=2$. Умножая обѣ части его на $(x-1)$, получаемъ кубичное ур-іе

$$x^3-4x^2+5x-2=0,$$

имѣющее три корня: $x_1=1$, $x_2=1$ и $x_3=2$.

Очевидно, что это ур-іе въ сущности эквивалентно данному, такъ какъ *различныя* значенія его корней суть 1 и 2, т. е. тѣ-же, что и у даннаго ур-ія. Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ умноженіе на величину, содержащую неизвѣстныя, не ввело постороннихъ корней. Произошло это по той причинѣ, что въ полученномъ произведеніи

$$(x-1)(x^2-3x+2)=0$$

значеніе $x=1$, обращающее введеннаго множителя $(x-1)$ въ нуль, дѣлаетъ и второго множителя (x^2-3x+2) тоже равнымъ нулю, т. е. не даетъ новаго, *лишняго* корня.

129. Резюмируя все вышеизложенное относительно умноженія обѣихъ частей ур-ія на величину, содержащую неизвѣстныя, можно сдѣлать слѣдующіе выводы:

1. *Если множитель C_x есть алгебраическое выраженіе*, **цѣлое** *относительно неизвѣстныхъ, то, ни при какихъ* **конечныхъ** *значеніяхъ неизвѣстныхъ, множитель этотъ обратиться въ безконечность не можетъ, а потому полученное уравненіе* **можетъ пріобрѣсти** *постороннія рѣшенія, ему не принадлежащія*, **но не можетъ потерять** *ни одного корня.*

2. *Если обѣ части уравненія* **раздѣлить** *на алгебраическое выраженіе*, **цѣлое** *относительно неизвѣстныхъ, (что равносильно умноженію на обратную величину), то полученное уравненіе можетъ* **потерять** *нѣкоторые корни*, **но не можетъ пріобрѣсти** *постороннихъ корней.*

Итакъ, если для рѣшенія заданнаго уравненія понадобится обѣ части его умножать (или дѣлить) на величину, содержащую неизвѣстныя, и рѣшать полученное такимъ образомъ ур-іе вмѣсто даннаго, то необходимо *испытать*, удовлетворяютъ ли полученные корни заданному ур-ію, и *отбросить лишніе корни.* Кромѣ того, необходимо *испытать*, не удовлетворяютъ ли данному ур-ію тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ введеннаго множителя въ *безконечность*, и *прибавить* къ полученнымъ корнямъ *тѣ* изъ испытуемыхъ значеній, *которыя обращаютъ заданное уравненіе въ тождество.*

130. Освобожденіе уравненій отъ знаменателей. Перенеся всѣ члены уравненія въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, мы можемъ всякому уравненію съ раціональными членами придать видъ:

$$\frac{A_x}{B_x}=0,$$

гдѣ A_x и B_x суть **цѣлые относительно неизвѣстныхъ** многочлены.

Требуется опредѣлить, возможно ли для рѣшенія подобнаго уравненія *отбросить* общаго знаменателя B_x, т. е. не поведетъ ли это къ потерѣ существующихъ, или къ пріобрѣтенію постороннихъ корней?

Другими словами, надо выяснить, *будутъ ли уравненія*

$$\frac{A_x}{B_x}=0 \ldots\ldots (1) \text{ и } A_x=0 \ldots (2)$$

равносильны?

Для точнаго разрѣшенія этого вопроса, удобнѣе всего прибѣгнуть къ общему методу, которымъ мы пользовались при доказательствѣ теоремъ §§ 123, 126, 127.

1°. Пусть, напр., рѣшивъ ур-іе (2), мы получили корень $x=a$. Слѣдовательно, можно написать **тождество**:

$$A_a \equiv 0.$$

Подставляя значеніе a вмѣсто x въ ур-іе (1), получимъ въ числителѣ A_a, т. е. *тождественный нуль*, а въ знаменателѣ—выраженіе B_a. Дробь вида

$$\frac{0}{B_a}$$

будетъ тождественно равна нулю во всѣхъ случаяхъ, кромѣ лишь того, когда, знаменатель B_a будетъ равенъ нулю, такъ въ этомъ случаѣ выраженіе

$$\frac{0}{B_a}=\frac{0}{0},$$

т. е. представляетъ **неопредѣленность**.

Постараемся эту неопредѣленность **раскрыть**, т. е. выяснить ея *истинное значеніе*.

Если выраженіе A_x обращается въ нуль при подстановкѣ a вмѣсто x, то, на основаніи § 4, заключаемъ, что A_x дѣлится нацѣло на $(x-a)$.

Если B_x тоже обращается въ нуль при подстановкѣ a вмѣсто x, то и B_x имѣетъ дѣлителя $(x-a)$.

Слѣдовательно, дробь $\frac{A_x}{B_x}$ можетъ принять неопредѣленную форму только лишь въ томъ случаѣ, если числитель и знаменатель ея имѣютъ **общихъ дѣлителей**. Если же этого нѣтъ, то ни одно изъ значеній x, обращающихъ числителя въ нуль, не можетъ обратить въ нуль и знаменателя, и слѣд., въ этомъ случаѣ *неопредѣленности получиться не можетъ*.

Итакъ, если дробь $\frac{A_x}{B_x}$ **несократима**, то всякій корень ур-ія (2) будетъ также корнемъ ур-ія (1), т. е. отъ отбрасыванія знаменателя B_x *не могутъ получиться* **посторонніе** *корни*.

Слѣдуетъ имѣть въ виду, что, приводя всѣ члены даннаго ур-ія къ одному знаменателю, надо тщательно заботиться о томъ, чтобы общій знаменатель былъ **наименьшимъ кратнымъ** всѣхъ имѣющихся знаменателей, т. е. *не содержалъ бы лишнихъ множителей*, такъ какъ въ противномъ случаѣ, послѣ приведенія непремѣнно получится *сократимая* дробь. Пусть, напр., дано ур-іе

$$\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{6}{25}.$$

Переписывая его подъ видомъ

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{6}{25},$$

замѣчаемъ, что общій знаменатель равенъ произведенію $(x+2)^2.(x-2)$. Приводя къ этому общему знаменателю, получаемъ ур-іе

$$\frac{3x^3+6x^2-37x-24}{25(x+2)^2.(x-2)}=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

Приравнивая нулю числитель и рѣшая кубичное ур-іе *)

$$3x^3+6x^2-37x-24=0,$$

находимъ корни: $x_1=3$; $x_2=\frac{-15+\sqrt{129}}{6}$; $x_3=\frac{-15-\sqrt{129}}{6}$.

Такъ какъ ни одно изъ этихъ рѣшеній не обращаетъ общаго знаменателя $(x+2)^2(x-2)$ въ нуль, то найденныя значенія будутъ корнями даннаго уравненія.

Если бы мы по ошибкѣ приняли за общаго знаменателя не наименьшее кратное данныхъ знаменателей, *а произведеніе ихъ* $(x^2-4)(x^2+4x+4)$, то послѣ приведенія получили бы ур-іе:

$$\frac{3x^4+12x^3-25x^2-98x-48}{25(x^2-4)(x^2+4x+4)}=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

Приравнявъ нулю числитель и рѣшивъ ур-іе

$$3x^4+12x^3-25x^2-98x-48=0,$$

нашли бы корни: $x_1=-2$, $x_2=3$; $x_3=\frac{-15+\sqrt{129}}{6}$; $x_4=\frac{-15-\sqrt{129}}{6}$.

---

*) Для рѣшенія этого уравненія разыскиваемъ цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей многочлена $3x^3+6x^2-37x-24$ по способу, изложенному въ § 13 (примѣръ VI).

Одинъ изъ этихъ корней, $x_1 = -2$, обращаетъ въ нуль знаменателя ур-ія (b) и потому даетъ неопредѣленность, что и показываетъ, что числитель и знаменатель этого ур-ія имѣютъ общаго множителя $x+2$, на котораго слѣдуетъ сократить дробь. Этотъ общій множитель былъ введенъ вслѣдствіе того, что мы приняли за общаго знаменателя произведеніе данныхъ знаменателей $(x^2-4)(x^2+4x+4)$, а не наименьшее кратное ихъ $(x+2)^2(x-2)$, и тѣмъ самымъ и ввели этого лишняго множителя $(x+2)$, который и причинилъ двойное неудобство: 1) повысилъ степень числителя до четвертой и 2) далъ неопредѣленность.

Изъ этого примѣра ясно, насколько надо быть внимательнымъ при приведеніи всѣхъ членовъ уравненія къ общему знаменателю.

2°. Пусть $x = \alpha$ есть корень ур-ія (1). Слѣдовательно, имѣемъ тождество:

$$\frac{A_\alpha}{B_\alpha} \equiv 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Но дробь $\frac{A_\alpha}{B_\alpha}$ можетъ равняться нулю только въ одномъ изъ слѣдующихъ двухъ случаевъ: или, **если числитель ея равенъ нулю**, или же, **если знаменатель ея равенъ безконечности**. Разсмотримъ каждое изъ этихъ предположеній въ отдѣльности.

I. Если числитель, т. е. $A_\alpha \equiv 0$, то, очевидно, что корень α удовлетворяетъ и ур-ію (2).

II. Если B_α равняется безконечности, то дробь $\frac{A_\alpha}{B_\alpha}$ принимаетъ неопредѣленную форму $\frac{\infty}{\infty}$. Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе B_α есть результатъ подстановки значенія α вмѣсто x въ B_x. Но B_x, будучи по условію **цѣлымъ** относительно x, не можетъ обратиться въ безконечность ни при какихъ конечныхъ значеніяхъ буквы x; слѣдовательно, B_α можетъ равняться безконечности только лишь при $\alpha = \infty$, но въ этомъ случаѣ и A_α *тоже равно безконечности*, а потому дробь $\frac{A_\alpha}{B_\alpha}$ принимаетъ неопредѣленную форму $\frac{\infty}{\infty}$.

Постараемся раскрыть эту неопредѣленность. Пусть числитель A_x представляетъ *цѣлый* относительно x многочленъ степени m, а знаменатель—тоже *цѣлый* многочленъ степени k, т. е.

$$A_x = A_m\, x^m + A_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0$$
$$B_x = B_k\, x^k + B_{k-1}\, x^{k-1} + \ldots + B_1 x + B_0.$$

При раскрытіи неопредѣленности изслѣдуемаго выраженія могутъ встрѣтиться три случая:

a) степень числителя выше *степени знаменателя*, т. е. $m > k$;
b) степень числителя равна *степени знаменателя*, т. е. $m = k$;
c) степень числителя ниже *степени знаменателя*, т. е. $m < k$.

a) Если $m > k$, то, раздѣливъ почленно числителя и знаменателя дроби

$$\frac{A_m\, x^m + A_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots\ldots A_1 x + A_0}{B_k\, x^k + B_{k-1}\, x^{k-1} + \ldots\ldots + B_1 x + B_0} \ldots\ldots (4)$$

на x^k и принявъ потомъ $x = \infty$, получимъ

$$\frac{\infty}{B_k},$$

что равняется безконечности, а не нулю. Итакъ, истинное значеніе неопредѣленности $\frac{A_x}{B_x}$ въ этомъ случаѣ не равно нулю, т. е. $x = \infty$ не есть корень даннаго ур-ія.

b) Если $m = k$, то, раздѣливъ почленно числителя и знаменателя дроби (4) на x^k и принявъ потомъ $x = \infty$, получимъ

$$\frac{A_m}{B_k},$$

т. е. конечную дробь, не равную нулю. Итакъ, и въ этомъ случаѣ уравненіе не имѣетъ безконечнаго корня.

c) Если, наконецъ, $m < k$, то, раздѣливъ числителя и знаменателя дроби (4) на x^m и положивъ потомъ $x = \infty$, получимъ

$$\frac{A_m}{\infty},$$

что всегда равно нулю. Итакъ, въ этомъ случаѣ значеніе $x = \infty$ есть истинный корень даннаго уравненія (1).

Резюмируя все вышесказанное, можно установить **правило**:

Уравненіе вида $\frac{A_x}{B_x}=0$, *въ которомъ* A_x *и* B_x *суть цѣлые относительно* x *многочлены, имѣетъ корень, равный безконечности, только лишь въ томъ случаѣ, если* **степень знаменателя выше степени числителя.**

Возвращаясь къ вопросу, будутъ ли корни ур-ія $\frac{A_x}{B_x}=0$ удовлетворять ур-ію $A_x=0$, видимъ, что если степень числителя выше или равна степени знаменателя, то всякій корень ур-ія (1) будетъ служить и корнемъ ур-ія (2); если же степень числителя ниже степени знаменателя, то ур-іе (1) будетъ имѣть еще корень $x=\infty$, который въ ур-іи (2) *потеряется*, такъ какъ A_∞ нулю равняться не можетъ.

131. На основаніи всего изложеннаго въ предыдущемъ параграфѣ, ясно, что хотя ур-ія

$$\frac{A_x}{B_x}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (1) \text{ и } A_x=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

вообще не равносильны, но на практикѣ отбрасываніе знаменателей, т. е. рѣшеніе ур-ія (2) вмѣсто (1) не повлечетъ ни потери корней ни пріобрѣтенія постороннихъ рѣшеній, если только при этомъ соблюдать слѣдующія **правила**:

1. *Если заданное уравненіе есть уравненіе нецѣлое относительно неизвѣстныхъ, то для приведенія всѣхъ членовъ къ общему знаменателю, надо брать за общаго знаменателя только* **наименьшее кратное** *данныхъ знаменателей.*

2. *Отбрасывая общаго знаменателя* B_x *даннаго уравненія* $\frac{A_x}{B_x}=0$ *и рѣшая уравненіе* $A_x=0$, *мы найдемъ* **всѣ конечныя** *значенія корней, удовлетворяющія заданному уравненію* $\frac{A_x}{B_x}=0$. *Каждое изъ полученныхъ значеній надо* **подставить въ знаменателя** B_x *и посмотрѣть,* **не обратится** *ли онъ отъ этой подстановки* **въ нуль.** *Если это случится, напр., при* $x=a$, *то дробь* $\frac{A_x}{B_x}$ *надо сократить на* $(x—a)$ *и приступить къ рѣшенію вновь полученнаго ур-ія* $\frac{A^1{}_x}{B^1{}_x}=0$, *отбрасывая опять знаменателя* $B^1{}_x$ *и т. д.*

3. Кромѣ того, если степень отброшеннаго знаменателя **выше** *степени числителя, то къ корнямъ, полученнымъ отъ рѣшенія ур-ія (2) и необращающимъ B_x въ нуль, надо* **прибавить** *еще одинъ корень $x = \infty$, если только по условію вопроса этотъ безконечный корень имѣетъ смыслъ* *).

Для лучшаго усвоенія вышесказаннаго рекомендуется внимательно продѣлать примѣры, помѣщенные въ слѣдующемъ параграфѣ.

132. Примѣры. 1. Рѣшить уравненіе

$$\frac{x^2 - x - 56}{x^4 - 3x^2 + 2} = 0$$

Приравнивая нулю числителя, находимъ корни 8 и (—7).

Подставляя эти значенія въ знаменателя, видимъ, что ни одно изъ нихъ не обращаетъ его въ нуль. Слѣдовательно заключаемъ (§ 131, прав. 2), что $x_1 = 8$ и $x_2 = -7$ суть единственные **конечные** корни даннаго уравненія. Но ур-іе это имѣетъ еще и **безконечный корень**, такъ какъ степень знаменателя ***выше степени числителя*** (§ 131, прав. 3). Дѣйствительно, раздѣливъ оба члена дроби на x^2, получаемъ:

$$\frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{56}{x^2}}{x^2 - 3 + \frac{2}{x^2}}.$$

При $x = \infty$, дробь эта обращается въ $\frac{1}{\infty}$, т. е. въ нуль.

Итакъ, предложенное ур-іе имѣетъ *три корня*: $x_1 = 8$; $x_2 = -7$; $x_3 = \infty$.

2. Рѣшить уравненіе

$$\frac{x^3 - 12x^2 + 17x + 90}{x^3 - 9x^2 + 23x - 15} = 0.$$

Приравниваемъ нулю числитель и рѣшаемъ кубичное ур-іе $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$.

---

*) Напр., если x обозначаетъ разстояніе до точки встрѣчи двухъ прямыхъ, то безконечный корень показываетъ, что эти прямыя *параллельны*, и слѣд., въ этомъ случаѣ рѣшеніе $x = \infty$ имѣетъ вполнѣ опредѣленный смыслъ. Подобныхъ примѣровъ можно подобрать очень много.

Для этой цѣли разыскиваемъ цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей многочлена $x^3-12x^2+17x+90$ по способу, указанному въ § 13 (примѣръ VI). Такъ какъ $(x+2)$ будетъ однимъ изъ такихъ дѣлителей, то, разлагая лѣвую часть на множителей, получаемъ:

$$x^3-12x^2+17x+90=(x+2)(x^2-14x+45)=0,$$

откуда или $x+2=0$, т. е. $x_1=-2$, или же $x^2-14x+45=0$, т. е. $x_2=5$ и $x_3=9$.

Подставляя эти значенія въ знаменателя, видимъ, что рѣшенія (-2) и 9 не обращаютъ его въ нуль, т. е. суть корни даннаго ур-ія. При x же, равномъ 5, знаменатель дѣлается равнымъ нулю. Заключаемъ, что данную дробь можно сократить на $(x-5)$. Выполнивъ это сокращеніе, замѣняемъ данное уравненіе равносильнымъ ему ур-іемъ

$$\frac{x^2-7x-18}{x^2-4x+3}=0.$$

Корни числителя $x_1=-2$ и $x_2=9$ знаменателя въ нуль не обращаютъ, и потому эти значенія суть единственные *конечные* корни даннаго ур-ія. Безконечнаго же корня разсматриваемое ур-іе не имѣетъ, такъ степень знаменателя не выше степени числителя. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ оба члена данной дроби на x^3, получимъ:

$$\frac{1-\frac{12}{x}+\frac{17}{x^2}+\frac{90}{x^3}}{1-\frac{9}{x}+\frac{23}{x^2}-\frac{15}{x^3}},$$

что при $x=\infty$ дѣлается равнымъ 1, а не нулю.

3. Рѣшить ур-іе:

$$\frac{x^4-29x^2+100}{x^3-4x^2+5x-2}=0.$$

Приравнивая нулю числитель и рѣшая биквадратное ур-іе $x^4-29x^2+100=0$, находимъ его корни $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=5$ и $x_4=-5$.

Одинъ изъ этихъ корней, а именно $x=2$, обращаетъ въ нуль и знаменателя и, слѣдовательно, долженъ быть отброшенъ. По сокращеніи на $x-2$, получаемъ:

$$\frac{(x+2)(x-5)(x+5)}{x^2-2x+1}=0.$$

Корни этого ур-ія суть: $x_1=-2$; $x_2=5$ и $x_3=-5$. Безконечнаго корня заданное ур-іе не имѣетъ, такъ какъ степень знаменателя *ниже* степени числителя. Дѣйствительно, раздѣливъ на x^3 оба члена дроби, получимъ:

$$\frac{x-\frac{29}{x}+\frac{100}{x^3}}{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}},$$

что, при $x=\infty$, обращается въ безконечность, а не въ нуль.

Итакъ, единственными корнями заданнаго ур-ія будутъ $x_1=-2$; $x_2=5$; $x_3=-5$.

133. ТЕОРЕМА IV. Отъ возвышенія обѣихъ частей даннаго уравненія въ цѣлую и положительную степень, получается новое уравненіе, вообще, не равносильное данному.

Пусть данное ур-іе будетъ

$$A_x=B_x. \qquad (1).$$

Возвысивъ обѣ части его въ степень, показатель которой есть натуральное число m, находимъ:

$$A_x^m=B_x^m. \qquad (2).$$

Замѣняемъ данныя ур-ія равносильными имъ (§ 124) уравненіями:

$$A_x-B_x=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (3) \text{ и } A_x^m-B_x^m=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (4).$$

1°. Пусть $x=a$ есть корень ур-ія (1). Слѣдовательно, имѣемъ **тождество:**

$$A_a-B_a\equiv 0.$$

Подставляя значеніе a вмѣсто x въ лѣвую часть ур-ія (4), получаемъ:

$$A_a^m-B_a^m=(A_a-B_a)(A_a^{m-1}+A_a^{m-2}\,.\,B_a+\ldots+B_a^{m-1}),$$

что тождественно равно нулю, такъ какъ первый множитель есть нуль, а второй—не равенъ безконечности.

Итакъ,

$$A_\alpha^m - B_\alpha^m \equiv 0,$$

т. е. всякій корень ур-ія (1) есть въ то-же время и корень ур-ія (2). Другими словами, *отъ возвышенія обѣихъ частей уравненія въ одинаковую степень, корни* **потеряться не могутъ**.

2°. Пусть $x=\alpha$ есть корень ур-ія (4). Слѣдовательно, имѣемъ **тождество**:

$$A_\alpha^m - B_\alpha^m \equiv 0, \text{ или}$$

$$(A_\alpha - B_\alpha)(A_\alpha^{m-1} + A_\alpha^{m-2}B_\alpha + \ldots + A_\alpha \cdot B_\alpha^{m-2} + B_\alpha^{m-1}) \equiv 0 \,.\, .(5).$$

Произведеніе можетъ тождественно равняться нулю, если, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ множителей есть нуль.

Слѣдовательно, изъ тождества (5) слѣдуетъ, что

или $$A_\alpha - B_\alpha \equiv 0 \,.\,.\,.\,.\,. (6),$$

или же $$A_\alpha^{m-1} + A_\alpha^{m-2}B_\alpha + \,.\,.\,.\,.\,.\, + B_\alpha^{m-1} \equiv 0 \,.\,.\,.\,. (7).$$

Если имѣетъ мѣсто равенство (6), то значеніе $x=\alpha$ удовлетворяетъ и ур-ію (1). Если же $A_\alpha - B_\alpha \neq 0$, а имѣетъ мѣсто равенство (7), то значеніе $x=\alpha$ не есть корень даннаго ур-ія (3), или равносильнаго ему ур-ія (1).

Итакъ, уравненіе, полученное отъ возвышенія въ одинаковую степень обѣихъ частей заданнаго уравненія, можетъ имѣть **посторонніе корни**.

Въ справедливости вышеизложеннаго можно убѣдиться на самыхъ простыхъ примѣрахъ. Пусть, напр., дано ур-іе $x=2$. Возвышая обѣ части въ квадратъ, получаемъ: $x^2=4$, или $x^2-4=0$, или $(x-2)(x+2)=0$, откуда или 1) $x-2=0$, т. е. $x=2$, или же 2) $x+2=0$, т. е. $x=-2$ . . . корень, не принадлежащій данному ур-ію и получившійся вслѣдствіе возвышенія обѣихъ частей его въ квадратъ.

Итакъ, доказанная теорема говоритъ, что если для рѣшенія уравненія приходится обѣ части его возвышать въ одну и ту-же степень, то корни полученнаго такимъ образомъ уравненія необходимо **испытать**, *и тѣ, которые не удовлетворяютъ заданному уравненію, надо отбросить, какъ посторонніе.*

134. Примѣры 1. Дано уравненіе:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}.$$

Возведя обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

$$2\sqrt{6x-8-x^2}=4-x;$$

возведя въ квадратъ еще разъ, получаемъ квадратное ур-іе:

$$5x^2-32x+48=0.$$

Оба корня этого ур-ія $x_1=4$ и $x_2=2,4$ по подстановкѣ въ заданное ур-іе, ему удовлетворяютъ.

II. Дано уравненіе:

$$\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}.$$

Возвышая обѣ части въ квадратъ, находимъ:

$$x+4=\sqrt{42x-8-10x^2}.$$

Возвышая въ квадратъ еще разъ, получаемъ квадратное уравненіе:

$$11x^2-34x+24=0.$$

Корни этого ур-ія суть: 2 и $\frac{12}{11}$. Корень $x=2$, по подстановкѣ въ данное ур-іе, обращаетъ его въ тождество, корень же $\frac{12}{11}$ данному ур-ію не удовлетворяетъ, но удовлетворяетъ ур-ію:

$$\sqrt{8-2x}-\sqrt{5x-1}=\sqrt{x-1}.$$

III. Разсмотримъ два уравненія:

$$\sqrt{93-x}=3+\sqrt{48-x}. \qquad (1).$$

$$\sqrt{93-x}=3-\sqrt{48-x}. \qquad (2).$$

Уравненія эти по возвышеніи въ квадратъ даютъ:

$$6=\sqrt{48-x} \qquad (3).$$

$$6=-\sqrt{48-x}. \qquad (4).$$

Возвышая оба ур-ія въ квадратъ еще разъ, получаемъ для обоихъ случаевъ одно и то-же значеніе неизвѣстнаго $x=12$. Корень этотъ, удовлетворяя ур-ію (1), не удовлетворяетъ ур-ію (2).

IV. Уравненія

$$x-9=\sqrt{9-x}\ldots(1) \text{ и } x-9=-\sqrt{9-x}\ldots(2),$$

по возвышеніи въ квадратъ, даютъ одно и то-же ур-іе:

$$x^2-17x+72=0,$$

имѣющее корни $x_1=9$; $x_2=8$.

Корень $x_1=9$ удовлетворяетъ обоимъ уравненіямъ. Корень же $x_2=8$, принадлежа ур-ію (2), не принадлежитъ ур-ію (1).

V. Возьмемъ еще уравненіе

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=4.$$

Возвышая обѣ части въ квадратъ, получаемъ:

$$\sqrt{x^2+4x-12}=x-6.$$

Возвысивъ въ квадратъ еще разъ, найдемъ $x=3$.

По подстановкѣ найденнаго значенія въ заданное ур-іе, увидимъ, что оно ему не удовлетворяетъ.

Въ дѣйствительности, $x=3$ есть корень ур-ія

$$\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4.$$

Данное же уравненіе корней не имѣетъ.

Замѣчаніе. Слѣдуетъ имѣть въ виду, что, подставляя для провѣрки найденныя значенія корней, берутъ всегда только **положительныя значенія радикаловъ.**

135. ТЕОРЕМА V. Если въ системѣ уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными одно изъ уравненій замѣнить новымъ, полученнымъ отъ сложенія по частямъ заданныхъ уравненій, то такая система будетъ равносильна данной.

По условію теоремы требуется доказать, что система уравненій

$$\left.\begin{array}{l} A_{x,\,y,\,z}\,.\;.\;.\;.=B_{x,\,y,\,z}\,.\;.\;.\;. \\ C_{x,\,y,\,z}\,.\;.\;.\;.=D_{x,\,y,\,z}\,.\;.\;.\;. \\ E_{x,\,y,\,z}\,.\;.\;.\;.=F_{x,\,y,\,z}\,.\;.\;.\;. \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{array}\right\}\ \mathrm{I}.$$

равносильна системѣ:

$$\left.\begin{array}{c} A_{x,y,z\ldots}+C_{x,y,z\ldots}+E_{x,y,z\ldots}+\ldots=B_{x,y,z\ldots}+D_{x,y,z\ldots}+F_{x,y,z\ldots}+\ldots \\ C_{x,\,y,\,z\ldots}=D_{x,\,y,\,z\ldots} \\ E_{x,\,y,\,z\ldots}=F_{x,\,y,\,z\ldots} \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;, \end{array}\right\}\ \mathrm{II}.$$

т. е., что каждый изъ корней первой системы удовлетворяетъ и второй, и наоборотъ, каждый корень системы (II) служитъ также корнемъ и системы (I).

1°. Пусть $x=a$, $y=b$, $z=c$. . . . суть корни системы (I). Слѣдовательно, имѣемъ рядъ тождествъ:

$$A_{a,\,b,\,c}\,.\;.\;.\;.\equiv B_{a,\,b,\,c}\,.\;.\;.\;. \qquad (1)$$

$$C_{a,\,b,\,c}\,.\;.\;.\;.\equiv D_{a,\,b,\,c}\,.\;.\;.\;. \qquad (2)$$

$$E_{a,\,b,\,c}\,.\;.\;.\;.\equiv F_{a,\,b,\,c}\,.\;.\;.\;. \qquad (3)$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Складывая эти тождества почленно, получаемъ новое тождество:

$$A_{a,\,b,\,c\ldots}+C_{a,\,b,\,c\ldots}+E_{a,\,b,\,c\ldots}\equiv B_{a,\,b,\,c\ldots}+D_{a,\,b,\,c\ldots}+F_{a,\,b,\,c\ldots}$$

Разсматривая его вмѣстѣ съ тождествами (2), (3)..., видимъ, что значенія $x=a$, $y=b$, $z=c$. . . . обращаютъ уравненія системы (II) въ тождества, т. е. суть корни этой системы.

2°. Пусть $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$. . . . суть корни системы (II). Слѣдовательно, можемъ написать рядъ тождествъ:

$$A_{\alpha,\beta,\gamma\ldots}+C_{\alpha,\beta,\gamma\ldots}+E_{\alpha,\beta,\gamma\ldots}\equiv B_{\alpha,\beta,\gamma\ldots}+D_{\alpha,\beta,\gamma\ldots}+F_{\alpha,\beta,\gamma\ldots} \qquad (4)$$

$$C_{\alpha,\beta,\gamma\ldots}\equiv D_{\alpha,\beta,\gamma\ldots} \qquad (5)$$

$$E_{\alpha,\beta,\gamma\ldots}\equiv F_{\alpha,\beta,\gamma\ldots} \qquad (6)$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Вычитая изъ тождества (4) сумму тождествъ (5, 6, . . .), получимъ новое **тождество**

$$A_{\alpha, \beta, \gamma \dots} \equiv B_{\alpha, \beta, \gamma \dots} \qquad (7)$$

Соединяя тождества (5), (6), (7). . ., убѣждаемся, что $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ . . . суть корни системы (I).

Итакъ, системы (I) и (II) *равносильны*, что и треб. док.

135a. Замѣчаніе. Какъ видно изъ доказательства, справедливость предыдущей теоремы *не зависитъ отъ числа складываемыхъ уравненій*. Поэтому можно складывать и не всѣ заданныя уравненія, а только нѣкоторыя изъ нихъ. Полученное такимъ образомъ новое ур-іе можетъ замѣнить *любое* изъ заданныхъ.

До сложенія уравненій по частямъ мы, очевидно, имѣемъ право каждое изъ этихъ ур-ій *умножить на какую угодно конечную величину, не содержащую неизвѣстныхъ*, такъ какъ такое ур-іе равносильно заданному (§ 126).

Ясно также, что теорема эта остается справедливой и въ томъ случаѣ, если вмѣсто сложенія мы произведемъ *вычитаніе* данныхъ уравненій по частямъ.

Въ примѣненіи къ рѣшенію системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, теорема параграфа 135 говоритъ намъ, что данная система двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными:

$$(1) \; . \; . \; . \; . \; . \; A_{x,y}=B_{x,y} \text{ и } (2) \; . \; . \; . \; . \; . \; C_{x,y}=D_{x,y}$$

можетъ быть замѣнена равносильной ей системой:

$$(1') \; . \; . \; . \; . \; A_{x,y}+C_{x,y}=B_{x,y}+D_{x,y} \text{ и } (2') \; . \; . \; . \; . \; C_{x,y}=D_{x,y},$$

или даже системой:

$$(1'') \; . \; . \; . \; . \; . \; pA_{x,y}+qC_{x,y}=pB_{x,y}+qD_{x,y} \text{ и } (2'') \; . \; . \; . \; C_{x,y}=D_{x,y},$$

гдѣ p и q суть произвольныя конечныя величины, не равныя нулю.

На этомъ свойствѣ основанъ извѣстный способъ рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными посредствомъ сложенія и вычитанія (см., напр., «Алгебру Киселева» § 102), называемый также *способомъ уравниванія коэффиціентовъ*.

136. ТЕОРЕМА VI. Если одно изъ уравненій системы рѣшить относительно одного изъ неизвѣстныхъ *) и замѣнить это неизвѣстное въ другихъ уравненіяхъ найденнымъ значеніемъ, то получится новая система, равносильная данной, въ которой число уравненій и число неизвѣстныхъ единицею меньше, чѣмъ въ предложенной системѣ.

Положимъ, что мы рѣшили одно изъ уравненій предложенной системы, напр. первое, относительно x, т. е. выразили x въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ $y, z \ldots\ldots$

Такимъ образомъ, предложенная система (I) **) преобразовалась въ систему

$$\left.\begin{array}{l} x=f(y, z \ldots\ldots) \\ C_{x,y,z} \ldots\ldots = D_{x,y,z} \ldots\ldots \\ E_{x,y,z} \ldots\ldots = F_{x,y,z} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} 1.$$

Подставивши теперь найденное значеніе для x во всѣ уравненія системы (I), получимъ новую систему:

$$\left.\begin{array}{l} x=f(y,z \ldots\ldots) \\ C_{f(y,z \ldots),y,z} \ldots = D_{f(y,z \ldots),y,z} \ldots\ldots \\ E_{f(y,z \ldots),y,z} \ldots = F_{f(y,z \ldots\ldots),y,z} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} 2$$

въ которой всѣ уравненія, кромѣ перваго, уже не содержатъ буквы x.

Докажемъ, что системы (1) и (2) *равносильны.*

1°. Пусть $x=a$, $y=b$, $z=c$ . . . . суть корни системы (1).

Тогда имѣемъ рядъ тождествъ:

$$\left.\begin{array}{l} a\equiv f(b,c \ldots\ldots) \\ C_{a,b,c} \ldots\ldots \equiv D_{a,b,c} \ldots\ldots \\ E_{a,b,c} \ldots\ldots \equiv F_{a,b,c} \ldots\ldots \end{array}\right]$$

*) Т. е. выразить это неизвѣстное въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ предложенной системы.

**) См. § 135, стр. 165.

Замѣнивъ во всѣхъ этихъ тождествахъ, кромѣ перваго, величину a тождественно равной ей величиной $f(b, c \, . \, . \, . \, . \, .)$, получимъ **новую систему тождествъ:**

$$\begin{aligned} a &\equiv f(b, c \, . \, . \, . \, . \, .) \\ C_{f(b,c \, . \, . \, . \, . \, .), b, c \, . \, . \, . \, . \, .} &\equiv D_{f(b,c \, . \, . \, . \, . \, .), b, c \, . \, . \, . \, . \, .} \\ E_{f(b,c \, . \, . \, . \, . \, .), b, c \, . \, . \, . \, . \, .} &\equiv F_{f(b,c \, . \, . \, . \, . \, .), b, c \, . \, . \, . \, . \, .} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Сравнивая эти тождества съ системой ур-ій (2), видимъ, что значенія $x=a$, $y=b$, $z=c \, . \, . \, . \, .$ суть корни этой системы.

2°. Пусть $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma \, . \, . \, . \, . \, .$ суть корни системы (2). Слѣдовательно, имѣемъ рядъ **тождествъ:**

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv f(\beta, \gamma \, . \, . \, . \, . \, .) \\ C_{f(\beta,\gamma \, . \, . \, . \, . \, .), \beta, \gamma \, . \, . \, . \, . \, .} &\equiv F_{f(\beta,\gamma \, . \, . \, . \, . \, .), \beta, \gamma \, . \, . \, . \, . \, .} \\ E_{f(\beta,\gamma \, . \, . \, . \, . \, .), \beta, \gamma \, . \, . \, . \, . \, .} &\equiv F_{f(\beta,\gamma \, . \, . \, . \, . \, .), \beta, \gamma \, . \, . \, . \, . \, .} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Замѣнивъ во всѣхъ этихъ тождествахъ, кромѣ перваго, выраженіе $f(\beta, \gamma \, . \, . \, . \, .)$ тождественно равной ему величиной α, получимъ **новую систему тождествъ:**

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv f(\beta, \gamma \, . \, . \, . \, . \, .) \\ C_{\alpha, \beta, \gamma \, . \, . \, . \, . \, .} &\equiv D_{\alpha, \beta, \gamma \, . \, . \, . \, . \, .} \\ E_{\alpha, \beta, \gamma \, . \, . \, . \, . \, .} &\equiv F_{\alpha, \beta, \gamma \, . \, . \, . \, . \, .} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Сравненіе этихъ тождествъ съ системой ур-ій (1) показываетъ, что значенія $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma \, . \, . \, . \, .$ суть корни системы (1).

Итакъ, системы (1) и (2) *равносильны*, что и тр. док.

136а. Замѣчаніе. Замѣняя во всѣхъ уравненіяхъ данной системы неизвѣстное x его значеніемъ въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ $x=f(y, z \, . \, . \, . \, . \, .)$, мы заставляемъ исчезнуть это неизвѣстное изъ уравненій. Въ такихъ случаяхъ говорятъ, что оно **исключено.** И вообще, выраженіе «*исключить неизвѣстное изъ n уравненій*» значитъ замѣнить заданную систему изъ n уравненій новой *равносильной ей* системой изъ $(n-1)$ уравненій, въ которыхъ уже не содержится этого неизвѣстнаго.

На теоремѣ параграфа 136 основанъ извѣстный способъ рѣшенія системы ур-iй при помощи исключенія неизвѣстныхъ по способу *подстановки.* (См., напр., «Алгебру Киселева» § 100).

ИЗСЛѢДОВАНІЕ СИСТЕМЫ РѢШЕНІЙ ДВУХЪ УРАВНЕНІЙ СЪ ДВУМЯ НЕИЗВѢСТНЫМИ.

137. Общія формулы, служащія для рѣшенія системы

$$ax+by=c \;.\;.\;.\;.\;.\; (1) \text{ и } a_1x+b_1y=c_1 \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

представляются, какъ извѣстно (см., напр., «Алгебру Киселева» § 135), подъ видомъ:

$$x=\frac{cb_1-bc_1}{ab_1-ba_1} \text{ и } y=\frac{ac_1-ca_1}{ab_1-ba_1}.$$

Изслѣдованіе этихъ формулъ подраздѣляется на два случая: 1) общій знаменатель этихъ формулъ не равенъ нулю и 2) общій знаменатель равенъ нулю.

Первый случай никакого интереса для изслѣдованія не представляетъ (см., напр., «Алгебру Киселева» § 136, I), а потому обратимся прямо ко второму.

Итакъ, положимъ, что общій знаменатель

$$ab_1-ba_1=0,$$

причемъ допустимъ, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ a, a_1, b, b_1 не равенъ нулю.

1°. Пусть ни одинъ изъ числителей не обращается въ нуль, и, слѣдовательно, значенія обоихъ неизвѣстныхъ обращаются въ безконечность:

$$x=\frac{cb_1-bc_1}{0}=\infty;\; y=\frac{ac_1-ca_1}{0}=\infty.$$

Посмотримъ, что показываютъ эти безконечныя рѣшенія.

Согласно условія имѣемъ три зависимости:

$$ab_1-ba_1=0 \;.\;.\;.\;.\; (1);\; cb_1-bc_1\neq 0 \;.\;.\;.\;.\; (2);\; ac_1-ca_1\neq 0 \;.\;.\;. (3).$$

Изъ (1) видно, что

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1},$$

т. е., что *коэффиціенты при неизвѣстныхъ пропорціональны*.
Изъ (2) и (3) слѣдуетъ, что

$$\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1} \text{ и } \frac{a}{a_1}\neq\frac{c}{c_1},$$

т. е. *отношеніе коэффиціентовъ* **не равно** *отношенію свободныхъ членовъ*.

Если общій знаменатель отношенія коэффиціентовъ $\frac{a}{a_1}$ и $\frac{b}{b_1}$ обозначимъ k, то можно написать:

$$a=k\,.\,a_1;\ b=k\,.\,b_1 \text{ и } c\neq k\,.\,c_1\,.$$

Переписывая теперь данныя ур-ія (1) и (2) и замѣняя въ первомъ ур-іи a и b черезъ ka_1 и kb_1, получаемъ:

$$ka_1x+kb_1y=c \,.\,.\,.\,.\,.\, (3) \text{ и } a_1x+b_1y=c_1,\,.\,.\,.\,.\,.\, (4)$$

или, дѣля обѣ части ур-ія (3) на конечную величину k:

$$a_1x+b_1y=\frac{c}{k} \text{ и } a_1x+b_1y=c_1.$$

Сравнивая послѣднія ур-ія, видимъ, что лѣвыя части у нихъ одинаковы, а правыя различны, ибо по условію $\frac{c}{k}\neq c_1$. Слѣдовательно, данныя ур-ія **противорѣчатъ другъ другу**, или, какъ говорятъ, **несовмѣстны**, такъ какъ не можетъ одна и та-же величина a_1x+b_1y равняться одновременно двумъ **различнымъ** числамъ $\frac{c}{k}$ и c_1.

Итакъ, *безконечныя рѣшенія системы показываютъ, что заданныя уравненія* **несовмѣстны**.

Примѣръ. Уравненія $91x+26y=7$ и $14x+4y=15$ *несовмѣстны*, такъ какъ

$$\frac{91}{14}=\frac{26}{4}\neq\frac{7}{15}.$$

Дѣйствительно, умноживъ первое изъ нихъ на 2, а второе на 13, получимъ:

$$182x+52y=14 \text{ и } 182x+52y=195,$$

т. е. одна и та-же величина должна одновременно равняться и 14 и 195.

Также, очевидно, несовмѣстны уравненія

$$5x-7y=11 \text{ и } 15x-21y=17,$$

что можетъ быть сразу обнаружено хотя бы дѣленіемъ обѣихъ частей второго ур-ія на 3.

2°. Положимъ теперь, что кромѣ общаго знаменателя, обращается въ нуль и **одинъ изъ числителей**. Докажемъ, что въ этомъ случаѣ **и другой числитель тоже непремѣнно равенъ нулю.**

Итакъ, пусть

$$ab_1-ba_1=0 \text{ . . . . . (1) и } cb_1-bc_1=0 \text{ . . . . . (2).}$$

Изъ (1) имѣемъ:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1} \text{ . . . . . (3).}$$

Изъ (2):

$$\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1} \text{ . . . . . (4).}$$

Изъ равенствъ (3) и (4) выводимъ, что

$$\frac{a}{a_1}=\frac{c}{c_1}, \text{ откуда } ac_1-ca_1=0,$$

т. е. и второй числитель равенъ нулю.

Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ **оба** ***неизвѣстныхъ принимаютъ неопредѣленную форму***:

$$x=\frac{0}{0} \text{ и } y=\frac{0}{0}.$$

Чтобы выяснить, что представляетъ эта неопредѣленность, поступаемъ такъ. Обозначаемъ буквой k общій знаменатель равныхъ отношеній $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$ и $\frac{c}{c_1}$. Тогда

$$a=ka_1,\ b=kb_1,\ c=kc_1\ .$$

Подставляя эти значенія въ первое изъ ур-ій предложенной системы, приводимъ ее къ виду:

$$ka_1x+kb_1y=kc_1;\ a_1x+b_1y=c_1,$$

или, дѣля обѣ части перваго ур-iя на k:

$$a_1x+b_1y=c_1;$$

$$a_1x+b_1y=c_1.$$

Такимъ образомъ, оказывается, что оба данныя уравненiя *тождественны*, т. е. что въ дѣйствительности мы имѣемъ **не систему** уравненiй, а всего лишь **одно уравненiе** съ двумя неизвѣстными, а въ этомъ случаѣ, очевидно, неизвѣстныя могутъ имѣть безчисленное множество значенiй.

Итакъ, неопредѣленность, полученная въ отвѣтахъ для x и y есть **неопредѣленность истинная**, *происходящая отъ недостаточности данныхъ условiй.*

Слѣдуетъ замѣтить, что рѣшенiя $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$ нельзя понимать въ томъ смыслѣ, что *оба* неизвѣстныя могутъ принимать *совершенно произвольныя* значенiя. Дѣло въ томъ, что эти неизвѣстныя все-таки связаны однимъ уравненiемъ $a_1x+b_1y=c_1$, и, слѣдовательно, выбравъ значенiе *одного неизвѣстнаго*, напр. x, *произвольно*, мы должны вычислить *соотвѣтствующее* значенiе y, которое удовлетворяло бы данному уравненiю.

Примѣръ. Уравненiя $30x-12y=5$ и $35x-14y=\frac{35}{6}$ даютъ неопредѣленныя рѣшенiя, такъ какъ

$$\frac{30}{35}=\frac{-12}{-14}=\frac{5}{\frac{35}{6}}.$$

И дѣйствительно, каждое изъ нихъ можетъ быть представлено подъ однимъ и тѣмъ же видомъ

$$5x-2y=\frac{5}{6},$$

т. е. два неизвѣстныя x и y связаны *всего однимъ уравненiемъ.*

Замѣчанiе. Изъ вышеизложеннаго ясно, что если ни одинъ изъ коэффицiентовъ a, a_1, b, b_1 не равенъ нулю, то *для обоихъ неизвѣстныхъ* **одновременно** получаются рѣшенiя опредѣленныя, или несовмѣстныя, или неопредѣленныя.

Въ частныхъ же случаяхъ, когда нѣкоторые изъ коэффиціентовъ a, a_1, b, b_1 равны нулю, могутъ получиться и другіе результаты, такъ какъ общія формулы значеній для x и y въ этихъ случаяхъ подлежатъ особому для каждаго раза изслѣдованію *).

Примѣры для упражненій. Опредѣлить, какія изъ указанныхъ системъ дастъ рѣшенія опредѣленныя, несовмѣстныя или неопредѣленныя.

1. $13x+2y=11$; $14x+3y=12$. *Отв.*: рѣш. опред.
2. $4x-7y=9$; $20x-35y=14$. *Отв.*: сист. несовм.
3. $\frac{5}{7}x+\frac{3}{4}y=2$; $\frac{15}{7}x+\frac{9}{4}y=5$. *Отв.*: сист. несовм.
4. $6x+36y=10$; $7x+42y=\frac{35}{3}$. *Отв.*: сист. неопред.
5. $3x+2y=15$; $5x+4y=30$. *Отв.*: сист. опред.

137а. Изслѣдованіе рѣшеній системы двухъ однородныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

Уравненія называются *однородными*, если всѣ члены ихъ имѣютъ *одинаковое измѣреніе*. Слѣдовательно, общій видъ системы однородныхъ ур-ій 1-й степени съ двумя неизвѣстными есть слѣдующій:

$$ax+by=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;(1) \qquad a_1x+b_1y=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

т. е. уравненія эти отличаются отъ общаго случая тѣмъ, что у нихъ свободные члены $c=0$ и $c_1=0$.

Формулы рѣшенія этихъ уравненій могутъ быть получены изъ общихъ значеній для x и y предыдущаго параграфа, если положить въ нихъ $c=c_1=0$.

Такимъ образомъ, получаемъ:

$$x=\frac{0}{ab_1-ba_1},\quad y=\frac{0}{ab_1-ba_1}.$$

1°. Если общій знаменатель ab_1-ba_1 не есть нуль, то рѣшенія данной системы будутъ $x=0$ и $y=0$.

---

*) См. объ этомъ, напр., «Алгебру Киселева» § 137.

2°. Если же $ab_1 - ba_1 = 0$, то оба неизвѣстныхъ принимаютъ неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$. Чтобы уяснить истинное значенiе этой неопредѣленности, поступаемъ такъ. Изъ равенства $ab_1 - ba_1 = 0$ слѣдуетъ:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k, \text{ откуда } a = a_1k;\ b = b_1k,$$

гдѣ буквой k обозначена величина равныхъ отношенiй $\frac{a}{a_1}$ и $\frac{b}{b_1}$.

Предложенную систему можно теперь переписать такъ:

$$a_1kx + b_1ky = 0 \text{ и } a_1x + b_1y = 0.$$

Раздѣливъ обѣ части перваго ур-iя на конечную величину k, увидимъ, что оба уравненiя принимаютъ одинаковую форму:

$$a_1x + b_1y = 0,$$

т. е. въ дѣйствительности имѣется *всего лишь одно ур-iе съ двумя неизвѣстными*. Слѣдовательно, неопредѣленность въ данномъ случаѣ есть неопредѣленность *истинная*, зависящая отъ недостаточности условiй.

Къ этому же результату можно прiйти и другимъ путемъ: опредѣляемъ x изъ перваго ур-iя и подставляемъ во второе. Тогда предложенная система замѣнится слѣдующей, равносильной ей (§ 136):

$$x = -\frac{by}{a};\quad a_1\left(-\frac{by}{a}\right) + b_1y = 0,$$

или

$$x = -\frac{by}{a} \;.\;.\;.\;.\; (3);\qquad y(ab_1 - ba_1) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (4).$$

Такъ какъ ур-iе (4) представлено теперь подъ видомъ произведенiя двухъ множителей, то или

1) $y = 0$ и тогда изъ ур-iя (3): $x = 0$,

или же 2) $ab_1 - ba_1 = 0$, и тогда y можетъ принимать совершенно произвольныя значенiя (кромѣ безконечности), а слѣд., произволенъ будетъ и $x = -\frac{by}{a}$.

Замѣчаніе I. Въ этомъ изслѣдованіи предполагалось, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ a, b, a_1, b_1 не равенъ нулю. Если же одинъ или нѣкоторые изъ нихъ суть нули, то эти случаи подлежатъ особому изслѣдованію, что предоставляется продѣлать самимъ учащимся.

Замѣчаніе II. Слѣдуетъ имѣть въ виду, что въ случаѣ неопредѣленности рѣшенія уравненій (1) и (2), **отношеніе** ***неизвѣстныхъ остается вполнѣ опредѣленнымъ***, такъ какъ изъ уравненія $ax+by=0$, слѣдуетъ:

$$x:y=(-b):a.$$

ГЛАВА XII.

I. ИЗСЛѢДОВАНІЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНАГО УРАВНЕНІЯ, ЕСЛИ КОЭФФИЦІЕНТЫ ЕГО СТРЕМЯТСЯ КЪ НУЛЮ.

138. Квадратное ур-іе $ax^2+bx+c=0$ можетъ быть представлено въ видѣ:

$$bx+c=-ax^2.$$

Такъ какъ въ этомъ ур-іи x, очевидно, нулю равняться не можетъ, то, раздѣливъ обѣ части ур-ія на x^2, получимъ новое ур-іе:

$$\left(b+\frac{c}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=-a,$$

равносильное данному.

Если въ этомъ ур-іи положимъ, что коэффиціентъ a безконечно убываетъ, то произведеніе

$$\left(b+\frac{c}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}$$

стремится къ предѣлу, равному нулю, что возможно лишь въ томъ случаѣ, если, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ множителей этого произведенія стремится къ нулю. Итакъ, или $\left(b+\frac{c}{x}\right)$ стремится къ нулю, а, слѣд., *x стремится къ предѣлу, равному* $\left(-\frac{c}{b}\right)$, или же $\frac{1}{x}$ стремится къ нулю, и слѣд., *x стремится къ безконечности.*

139. При выводѣ общихъ формулъ для рѣшенія квадратнаго уравненія $ax^2+bx+c=0$, приходится обѣ части умножать и дѣлить на коэффиціентъ a, что является вполнѣ допустимымъ только до тѣхъ поръ, пока a есть число конечное (§ 126). Если же a становится перемѣнной величиной, безконечно убывающей, то отъ умноженія и дѣленія на a можетъ получиться уравненіе неравносильное данному. Слѣдовательно, является вопросъ, *будутъ ли общія формулы*

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ и } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

вѣрны и для разсматриваемаго частнаго случая, или нѣтъ.

Обращаясь для этого къ изслѣдованію **формулы корней** уравненія $ax^2+bx+c=0$, видимъ, что въ случаѣ положительнаго коэффиціента b, корень

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

при a, стремящемся къ нулю, принимаетъ *неопредѣленный видъ* $\frac{0}{0}$; корень же

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

стремится къ безконечности.

Если же коэффиціентъ b отрицателенъ, то, наоборотъ, x_1 стремится къ безконечности, а x_2 принимаетъ неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$.

Чтобы раскрыть эту неопредѣленность, полагая, напр., b положительнымъ, умножимъ числителя и знаменателя значенія x_1 на сопряженную величину числителя. Тогда

$$x_1=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=$$

$$=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}.$$

Отсюда видно, что неопредѣленность корня x_1 зависитъ отъ присутствія въ числителѣ и знаменателѣ множителя $2a$, стремящагося къ нулю. Сокращаемъ поэтому дробь на $2a$.

Тогда получается:

$$x_1 = \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},$$

что при безконечномъ убываніи a, стремится къ предѣлу, равному $\left(-\frac{c}{b}\right)$.

Итакъ, мы видимъ, что и при a, стремящемся къ нулю, общія формулы рѣшенія квадратнаго уравненія остаются вѣрными, такъ какъ даютъ результатъ, согласный съ выводомъ § 138. Слѣдовательно, имѣемъ:

Если въ уравненіи $ax^2+bx+c=0$ коэффиціентъ a стремится къ нулю, то **одинъ** *изъ корней уравненія* **стремится къ безконечности, а другой—къ предѣлу, равному** $\left(-\frac{c}{b}\right)$.

140. Разсмотримъ теперь, что дѣлается съ корнями уравненія $ax^2+bx+c=0$ въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты a и b **одновременно оба стремятся къ нулю.**

Замѣняя уравненіе $ax^2+bx+c=0$ равносильнымъ ур-іемъ

$$\left(b+\frac{c}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} = -a,$$

замѣчаемъ, что при безконечномъ убываніи a и b, уравненіе это стремится къ предѣльной формѣ:

$$\frac{c}{x^2} = 0.$$

Такъ какъ c есть величина конечная. то послѣднему уравненію можно удовлетворить, только положивъ $x=\infty$.

Обращаясь въ этомъ случаѣ къ формуламъ корней, видимъ, что и x_1 и x_2 оба принимаютъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. Для раскрытія этой неопредѣленности, преобразуемъ обѣ формулы корней, какъ въ предыдущемъ случаѣ, умноженіемъ на сопряж. величины числителей. Получаемъ:

$$x_1=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}};\ x_2=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Если a и b стремятся къ нулю, то и x_1 и x_2 оба стремятся къ безконечности.

Итакъ, при безконечномъ убываніи обоихъ коэффиціентовъ a и b, **оба корня** *квадратнаго уравненія* **стремятся къ безконечности.**

141. Если, наконецъ, въ уравненіи $ax^2+bx+c=0$ всѣ три коэффиціента a, b, c одновременно стремятся къ нулю, то нетрудно убѣдиться, какъ изъ самой формы ур-ія, такъ и изъ значенія корней его, что въ этомъ случаѣ x_1 и x_2 остаются совершенно *неопредѣленными*, т. е. уравненіе удовлетворяется *произвольнымъ значеніемъ* x.

II. МНИМЫЯ И КОМПЛЕКСНЫЯ ЧИСЛА.

142. Всѣ алгебраическія дѣйствія могутъ быть раздѣлены на 2 класса: на дѣйствія *прямыя* (сложеніе, умноженіе. возвышеніе въ натуральную степень) и на дѣйствія *обратныя* (вычитаніе, дѣленіе, извлеченіе корня). Всякое обратное дѣйствіе приводитъ насъ къ открытію новаго разряда величинъ: такъ дѣйствіе вычитанія ввело *отрицательныя числа*, дѣленіе — *дроби*. Извлеченіе корня приводитъ насъ къ открытію двоякаго рода величинъ: *несоизмѣримыхъ* и *мнимыхъ*. Съ числами несоизмѣримыми мы уже ознакомились въ §§ **41—55**; переходимъ теперь къ изученію чиселъ мнимыхъ.

143. Впервые съ необходимостью введенія мнимыхъ чиселъ мы встрѣчаемся при рѣшеніи квадратнаго уравненія

$$ax^2+bx+c=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, не вводя мнимыхъ чиселъ, мы должны были бы говорить, что уравненіе это въ нѣкоторыхъ случаяхъ (при $b^2<4ac$) вовсе не имѣетъ рѣшеній, и потому не могли бы рѣшать квадратныхъ уравненій въ буквенномъ видѣ, такъ какъ форма результатовъ мѣнялась бы въ зависимости отъ численнаго значенія буквъ. Введеніе мнимыхъ чиселъ даетъ возможность избѣжать этихъ затрудненій и установить фактъ, что квадратное ур-іе *всегда* имѣетъ 2 корня.

Итакъ, введеніе въ Алгебру мнимыхъ чиселъ имѣетъ цѣлью *обобщить* алгебраическія дѣйствія.

144. Опредѣленія и соглашенія.

Корень квадратный изъ отрицательнаго числа не можетъ быть выраженъ ни положительнымъ, ни отрицательнымъ числомъ и представляетъ *новый разрядъ* величинъ, называемыхъ *мнимыми*, въ отличіе отъ обыкновенныхъ величинъ, называемыхъ *вещественными* или *дѣйствительными*. Итакъ,

Мнимымъ выраженіемъ называется квадратный корень изъ отрицательнаго числа,

Напр., $\sqrt{-25}$; $\sqrt{-3}$; $\sqrt{-a^2}$; $\sqrt{-7}$ суть мнимыя выраженія. Выраженія этого вида совершенно не заключаютъ въ себѣ идеи объ измѣреніи и сравненіи величинъ *); они не представляютъ *никакой* величины, это есть только фикція, позволяющая *обобщать алгебраическія дѣйствія*.

Вводя въ Алгебру понятіе о мнимыхъ числахъ, необходимо установить нѣкоторыя соглашенія:

1. *Первое соглашеніе состоитъ въ введеніи мнимой единицы, обозначаемой знакомъ i; этой мнимой единицѣ условно приписываютъ свойство, выражаемое равенствомъ:*

$$i^2 = -1.$$

Итакъ, i есть условное изображеніе такого фиктивнаго числа, квадратъ котораго равенъ (-1).

2. *Всякое мнимое число, напр., $\sqrt{-a}$, условливаются разсматривать, какъ произведеніе двухъ чиселъ: $\sqrt{a}$ и i, такъ что*

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,.\,i.$$

*) Слѣдуетъ замѣтить, что *примѣненіе знаковъ неравенства* ($>$ и $<$) къ мнимымъ величинамъ *невозможно*. Такъ, напр., нельзя говорить, что $\sqrt{-25} > \sqrt{-9}$. Подобное примѣненіе противорѣчило бы самому опредѣленію понятій *больше* и *меньше* (см. «Алгебру» Киселева § 235).

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\sqrt{-1}=\sqrt{1}\,.\,i=i,$$

т. е. *мнимая единица i есть корень квадратный изъ отрицательной единицы.* Результатъ этотъ нисколько не противорѣчитъ вышеприведенному опредѣленію i, ибо

$$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1.$$

3. *Уславливаются производить всѣ дѣйствія надъ мнимыми числами по тѣмъ же самымъ правиламъ, по которымъ они производятся надъ числами вещественными.*

145. Введя всѣ эти соглашенія, разсмотримъ **возвышеніе мнимой единицы въ натуральную степень.**

Составляемъ таблицу:

$$i^1=i;\ i^2=-1;\ i^3=i^2\,.\,i=-i;\ i^4=i^2\,.\,i^2=(-1)(-1)=+1;$$
$$i^5=i^4\,.\,i=i;\ i^6=i^4\,.\,i^2=-1;\ i^7=i^4\,.\,i^3=-i;\ i^8=i^4\,.\,i^4=1.$$

Такимъ образомъ, оказывается, что

$$i^5=i^1=i,$$
$$i^6=i^2=-1,$$
$$i^7=i^3=-i,$$
$$i^8=i^4=+1,$$

т. е., что различныя натуральныя степени мнимой единицы i могутъ имѣть всего *четыре различныя значенія.*

Докажемъ, что и при дальнѣйшемъ увеличеніи натуральнаго показателя степени n, выраженіе i^n можетъ имѣть **всего четыре различныя значенія.** Въ самомъ дѣлѣ, всякое натуральное число n, по отношенію къ дѣлителю 4, можетъ представлять слѣдующіе 4 случая:

1. Число n дѣлится на 4 безъ остатка, т. е. имѣетъ видъ $4k$.
2. » n при дѣл. на 4 даетъ ост. 1, т. е. имѣетъ видъ $4k+1$.
3. » n » » » 4 » » 2 » » » $4k+2$.
4. » n » » » 4 » » 3 » » » $4k+3$.

Разсмотримъ значенія i въ каждой изъ этихъ степеней:

1) $n=4k$; $i^n=i^{4k}=(i^4)^k=(+1)^k=+1$.

2) $n=4k+1$; $i^n=i^{4k+1}=(i^{4k}) \,.\, i=(+1) \,.\, i=+i$.

3) $n=4k+2$; $i^n=i^{4k+2}=(i^{4k}) \,.\, (i^2)=(+1) \,.\, (-1)=-1$.

4) $n=4k+3$; $i^n=i^{4k+3}=(i^{4k}) \,.\, (i^3)=(+1) \,.\, (-i)=-i$.

Отсюда заключаемъ:

1°. *Всѣ* **четныя** *степени* i **вещественны**; *онѣ равны* (+1), *если показатель есть число кратное четырехъ, и равны* (—1), *если четный показатель не дѣлится безъ остатка на 4.*

2°. *Всѣ* **нечетныя** *степени* i **мнимы**; *онѣ равны* ($+i$), *когда показатель при дѣленіи на 4 даетъ въ остаткѣ 1, и равны* ($-i$), *если показатель при дѣленіи на 4 даетъ въ остаткѣ 3.*

Примѣры. 23 при дѣленіи на 4 даетъ въ остаткѣ 3; поэтому $i^{23}=-i$.

26 при дѣленіи на 4 даетъ остатокъ 2, а потому $i^{26}=-1$.
76 » » » 4 » » 0, » $i^{76}=+1$.

Примѣчаніе. Такъ какъ для опредѣленія i^n надо знать только *остатокъ* отъ дѣленія i на 4, а величина частнаго никакого значенія не имѣетъ, то, когда n превышаетъ 100, нѣтъ надобности дѣлить все число n на 4: *для опредѣленія остатка, достаточно раздѣлить на 4 лишь двѣ послѣднія цифры числа n* *). Напр., $i^{3271}=-i$, ибо 71 при дѣленіи на 4 даетъ въ остаткѣ 3; также $i^{5232}=+1$ и т. д.

146. Комплексныя числа. Выраженіе вида $a+bi$, гдѣ a и b суть *вещественныя* количества, т. е. выраженія, состоящія изъ соединенія дѣйствительной части (a) и мнимой части (bi), называются *комплексными числами.*

Вводя въ Алгебру комплексныя числа, сдѣлаемъ относительно ихъ слѣдующія **соглашенія**:

1°. *Комплексное число* $a+bi$ *будемъ считать* **равнымъ нулю** *только тогда, когда* **порознь** *a и b* **равны нулю.**

2°. *Два комплексныя числа* $a+bi$ *и* $c+di$ *будемъ считать* **равными между собой** *только тогда, если у нихъ* **равны порознь вещественныя части и коэффиціенты при мнимыхъ частяхъ,** *т. е. если* $a=c$, *и* $b=d$.

---

*) См. «Курсъ теор. Ариѳм.» Сост. П. Шмулевичъ § 53.

147. Комплексныя числа могутъ быть разсматриваемы, какъ *самая общая* форма чиселъ; въ этой формѣ заключаются и числа вещественныя и числа мнимыя. Въ самомъ дѣлѣ, при $b=0$, комплексъ $a+bi$ принимаетъ дѣйствительную форму a; если же $a=0$, чисто мнимую форму bi.

Опредѣленіе. *Два комплексныя количества*

$$a+bi \text{ и } a-bi,$$

отличающіяся другъ отъ друга только знаками при коэффиціентахъ мнимой части, называются **сопряженными комплексами.** Таковы, напр., комплексы: $5+3i$ и $5-3i$; $1+i$ и $1-i$; $2-7i$ и $2+7i$ и т. д.

148. Модулемъ комплекснаго числа *называется положительное значеніе квадратнаго корня изъ суммы квадратовъ: вещественной части и коэффиціента при мнимой части.*

Итакъ, модуль комплекса $a+bi=+\sqrt{a^2+b^2}$.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что модуль вещественнаго числа a есть $+\sqrt{a^2}$, т. е., если a есть положительное число, то модуль его равенъ самому числу a, если же a есть отрицательное число, то модуль его есть положительное число $(-a)$.

Примѣры. $Mod(2-3i)=+\sqrt{4+9}=+\sqrt{13}$; $Mod(5+12i)=$ $=+\sqrt{25+144}=+13$; $Mod\left(-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=$ $=+1$; $Mod(i)=+\sqrt{0+1}=+1$; $Mod(-i)=+\sqrt{0+1}=+1$; $Mod(5)=+\sqrt{25+0}=+5$; $Mod(-3)=+\sqrt{9+0}=+3$.

Очевидно, что **два сопряженные комплекса** $a+bi$ и $a-bi$ **имѣютъ общій модуль,** равный $+\sqrt{a^2+b^2}$.

Примѣры. $Mod\ (3+4i)=Mod\ (3-4i)=+5$; $Mod\ (7-i)=$ $=Mod\ (7+i)=+\sqrt{50}$; $Mod\ (3i)=Mod\ (-3i)=+3$.

Переходимъ теперь къ **дѣйствіямъ надъ комплексными числами.**

149. СЛОЖЕНІЕ. Суммою *двухъ или нѣсколькихъ комплексовъ:*

$$a+bi,\ c+di,\ e+fi\ .\ .\ .\ .\ .$$

называется новый комплексъ, **дѣйствительная часть** *котораго равна* **суммѣ дѣйствительныхъ** *частей данныхъ комплексовъ,* ***а*** **коэффиціентъ при мнимой части** *равенъ* **суммѣ коэффиціентовъ при мнимыхъ частяхъ** *данныхъ комплексовъ.*

Примѣры. I. $(5+3i)+(7-2i)+(1-3i)=(5+7+1)+$ $+(3-2-3)i=13-2i.$

II. $(4+21i)+(-5+7i)+(2+11i)+(1-i)=2+38i.$

150. ВЫЧИТАНІЕ. Разностью *двухъ комплексовъ $a+bi$ и $c+di$ называется такой комплексъ $x+yi$, который, будучи приложенъ къ вычитаемому, даетъ уменьшаемое.*

Итакъ, по опредѣленію:

$$(a+bi)-(c+di)=x+yi,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

гдѣ $x+yi$ есть комплексъ, удовлетворяющій условію:

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi,$$

или, на основаніи § 149:

$$(c+x)+(d+y)i=a+bi.$$

Для возможности существованія такого равенства необходимо (§ 146, *условіе 2*), чтобы порознь

$$c+x=a,\ \text{откуда}\ x=a-c;$$
$$d+y=b,\ \text{откуда}\ y=b-d.$$

Подставляя эти значенія x и y въ формулу (1), получаемъ:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Послѣднее равенство говоритъ намъ, что комплексъ, равный разности двухъ данныхъ комплексовъ, имѣетъ *дѣйствительную часть, равную разности дѣйствительныхъ частей данныхъ комплексовъ, и коэффиціентъ при мнимой части, равный разности коэффиціентовъ мнимыхъ частей данныхъ комплексовъ.*

Примѣры. I. $(7-9i)-(5-i)=(7-5)+(-9+1)i=2-8i.$

II. $(-1+3i)-(5+2i)=-6+i.$

151. УМНОЖЕНІЕ. Произведеніемъ *двухъ или нѣсколькихъ комплексовъ называется новый комплексъ, для полученія котораго* **перемножаютъ данные комплексы, какъ двучлены;** *при этомъ i разсматривается, какъ число, степени котораго удовлетворяютъ выведеннымъ ранѣе правиламъ* (§ 145).

Итакъ, имѣемъ: $(a+bi)\,.\,(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=$ $=(ac-bd)+(bc+ad)i$.

Примѣры. I. $(2-3i)\,.\,(5+i)=10-15i+2i-3i^2=13-13i$.

II. $(1-i)(2-5i)(-3+4i)=(2-2i-5i+5i^2)(-3+4i)=$ $=(-3-7i)(-3+4i)=9+21i-12i-28i^2=37+9i$.

Если мы составимъ по этому правилу произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексовъ $(a+bi)$ и $(a-bi)$, то получимъ:

$$(a+bi)\,.\,(a-bi)=a^2+abi-abi-b^2i^2=a^2+b^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2,$$

т. е. **произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексовъ есть вещественная величина, равная квадрату ихъ общаго модуля.**

Примѣры. I. $(5+2i)\,.\,(5-2i)=5^2+2^2=29$.

II. $(3-i)\,.\,(3+i)=3^2+1^2=10$.

III. $(7+3i)\,.\,(7-3i)=7^2+3^2=58$.

Послѣднее свойство сопряженныхъ комплексовъ даетъ возможность разлагать на множителей сумму двухъ квадратовъ.

Таковы, напр., разложенія:

$$x^2+y^2=(x+yi)(x-yi);$$
$$a^2+1=(a+i)(a-i).$$

152. ДѢЛЕНІЕ. Частнымъ *отъ раздѣленія двухъ комплексовъ* $(a+bi)$ *и* $(c+di)$ *называется новый комплексъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, воспроизводитъ дѣлимое.*

Итакъ, по опредѣленію имѣемъ:

$$\frac{a+bi}{c+di}=x+yi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

гдѣ комплексъ $x+yi$ долженъ удовлетворять условію:

$$(c+di)\,.\,(x+yi)=a+bi.$$

Изъ этого ур-ія мы можемъ опредѣлить x и y. Открывая скобки въ лѣвой части, получаемъ:

$$(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi,$$

что на основаніи опредѣленія равенства двухъ комплексовъ (§ 146, *усл.* 2) можетъ имѣть мѣсто только тогда, если

$$cx-dy=a,$$
$$dx+cy=b.$$

Для рѣшенія этихъ двухъ ур-ій съ двумя неизвѣстными, умножаемъ первое изъ нихъ на c, второе на d и складываемъ; получаемъ:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}.$$

Тоже находимъ $$y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Подставляя найденныя значенія x и y въ равенство (1), получаемъ:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Если мы умножимъ числителя и знаменателя дроби $\frac{a+bi}{c+di}$ на сопряженную величину знаменателя, то получимъ:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$

т. е. привели эту дробь къ виду частнаго отъ дѣленія $a+bi$ на $c+di$ (см. равенство 2).

Отсюда слѣдуетъ **правило**:

Для того, чтобы раздѣлить два комплекса другъ на друга, пишемъ ихъ въ видѣ дроби и умножаемъ оба члена этой дроби на сопряженную величину ея знаменателя.

Примѣры. I. $\frac{2-3i}{1+i}=\frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-3i-2i+3i^2}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i.$

II. $\frac{7+2i}{3-2i}=\frac{(7+2i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{21+6i+14i+4i^2}{13}=\frac{17}{13}+\frac{20}{13}i.$

III. $\frac{-2i}{1-i}=\frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-2i-2i^2}{2}=1-i.$

IV. $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i-i+i^2}{2}=-i.$

152a. ВОЗВЫШЕНІЕ ВЪ СТЕПЕНЬ. I. Если показатель степени n есть число *цѣлое и положительное*, то

$$(a+bi)^n=(a+bi)(a+bi)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (a+bi),$$

т. е. въ этомъ случаѣ возвышеніе въ степень совершается рядомъ послѣдовательныхъ умноженій. Такъ какъ изъ § 151 видно, что произведеніе комплексныхъ чиселъ даетъ тоже комплексное число, то и выраженіе $(a+bi)^n$ есть число комплексное, т. е. $(a+bi)^n=P+Qi$.

Примѣры. 1. Возвести комплексъ $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ въ кубъ.

Имѣемъ:

$$\left[\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right]^3=\tfrac{1}{8}\left[1+3i\sqrt{3}+3(i\sqrt{3})^2+(i\sqrt{3})^3\right]=\tfrac{1}{8}\left[1+3i\sqrt{3}-9-3i\sqrt{3}\right]=-1.$$

2. Возвести $2-3i$ въ пятую степень.

По формулѣ бинома Ньютона имѣемъ:

$$(2-3i)^5=2^5-5\ .\ 2^4\ .\ 3i+10\ .\ 2^3\ .\ (3i)^2-10\ .\ 2^2\ .\ (3i)^3+5\ .\ 2\ .\ (3i)^4-(3i)^5=$$
$$=32-240i-720+1080i+810-243i=122+597i.$$

II. Если показатель степени выраженъ числомъ цѣлымъ, но отрицательнымъ, то

$$(a+bi)^{-n}=\frac{1}{(a+bi)^n}=\left(\frac{1}{a+bi}\right)^n=\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)^n=\frac{P+Qi}{(a^2+b^2)^n}=M+Ni,$$

т. е. есть тоже число комплексное.

Примѣръ.

$$(5+2i)^{-2}=\frac{1}{(5+2i)^2}=\left(\frac{1}{5+2i}\right)^2=\left[\frac{5-2i}{29}\right]^2=\frac{21-20i}{841}=\frac{21}{841}-\frac{20}{841}i$$

III. Если показатель степени есть число дробное, то дѣйствіе приводится къ извлеченію корня, о чемъ сказано въ слѣдующемъ параграфѣ.

153. ИЗВЛЕЧЕНІЕ КОРНЯ. Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ комплекснаго числа $a+bi$. Предположимъ, что результатомъ этого дѣйствія будетъ тоже комплексное число, вида $x+yi$. Предположеніе это будетъ справедливо, если намъ удастся найти для x и y вещественныя значенія. Итакъ, пусть

$$\sqrt{a+bi}=x+yi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Возведя обѣ части въ квадратъ, получаемъ:

$$a+bi=x^2-y^2+2xyi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

На основаніи условія 2 (§ 146) заключаемъ, что подобное равенство возможно лишь тогда, если

$$x^2-y^2=a \ldots\ldots (3) \text{ и } 2xy=b \ldots\ldots (4)$$

Для опредѣленія x и y изъ этихъ равенствъ, возводимъ ихъ въ квадратъ и складываемъ:

$$x^4+y^4+2x^2y^2=a^2+b^2, \text{ или } (x^2+y^2)^2=a^2+b^2.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, мы возьмемъ только положительное значеніе радикала, такъ какъ ищемъ *вещественныя* значенія x и y, а сумма квадратовъ вещественныхъ чиселъ всегда положительна. Поэтому имѣемъ:

$$x^2+y^2=+\sqrt{a^2+b^2}.$$

Складывая и вычитая это ур-іе съ ур-іемъ (3), получаемъ:

$$x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})};\ y=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}.$$

Такъ какъ $\sqrt{a^2+b^2}$, очевидно, численно больше чѣмъ a, то подкоренная величина выраженій для x и y всегда положительна, т. е. значенія x и y получаются вещественныя. Кромѣ того, изъ ур-ія (4) видимъ, что произведеніе $x \cdot y$ должно имѣть такой же знакъ, какъ и b. Слѣдовательно, если $b>0$, то x и y имѣютъ одинаковые знаки, а если $b<0$, то знаки x и y должны быть различны. Поэтому, принимая b за положительное число, имѣемъ:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}+i\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}\right]$$

и

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}-i\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}\right].$$

Примѣры. 1. Извлечь квадратный корень изъ комплекснаго числа $(12-5i)$.

Имѣемъ: $\sqrt{12-5i}=x-yi$; $12-5i=x^2-y^2-2xyi$, откуда

$$x^2-y^2=12;\ 2xy=5.$$

Возвышаемъ въ квадратъ и складываемъ:

$$x^4+y^4+2x^2y^2=169;\text{ откуда: } x^2+y^2=+13.$$

Изъ равенствъ $x^2-y^2=12$ и $x^2+y^2=13$ находимъ:

$$x=\pm\frac{5}{\sqrt{2}};\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Слѣдовательно, окончательно получаемъ:

$$\sqrt{12-5i}=\pm\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i\right).$$

2. Извлечь квадр. корень изъ комплекснаго числа $3+4i$.

Поступая, какъ указано, найдемъ:

$$\sqrt{3+4i}=\pm(2+i).$$

Что касается корней степени выше второй, то примѣненіе вышеизложеннаго пріема приводитъ къ уравненіямъ высшихъ степеней, и потому неразрѣшимо при помощи элементарной алгебры. Вмѣсто этого употребляется обыкновенно иной пріемъ, основанный на тригонометрическомъ представленіи комплексныхъ чиселъ, что выходитъ за предѣлы настоящаго курса.

153а. Разсмотрѣвъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе комплексныхъ чиселъ, можемъ вывести заключеніе, что **результатъ всѣхъ этихъ дѣйствій надъ комплексными числами даетъ число тоже комплексное.**

Замѣчаніе. Производя различныя дѣйствія надъ вещественными числами, мы видѣли, что всякое обратное дѣйствіе вводило новый разрядъ величинъ и требовало расширенія первоначальнаго понятія о числѣ. Такъ вычитаніе ввело отрицательныя числа; дѣленіе — дроби; извлеченіе корня — несоизмѣримыя и мнимыя числа. Изучивши же всевозможныя алгебраическія дѣйствія надъ комплексными числами, мы видимъ, что въ результатѣ всѣхъ этихъ дѣйствій всегда получается опять-таки комплексное число, т. е. не требуется вводить какихъ либо новыхъ понятій о числахъ. Изъ этого заключаемъ, что комплексная форма чиселъ есть дѣйствительно самая общая форма т. е., что дальнѣйшее расширеніе понятія о числѣ уже невозможно.

154. Приведемъ еще одну теорему, имѣющую постоянное примѣненіе при рѣшеніи задачъ.

ТЕОРЕМА. Если квадратное уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ комплексный корень $\alpha+\beta i$, то оно имѣетъ также и другой комплексный корень $\alpha-\beta i$, сопряженный съ первымъ.

Пусть квадр. ур-іе $ax^2+bx+c=0$ имѣетъ корень $\alpha+\beta i$. Слѣд., равенство

$$a(\alpha+\beta i)^2+b(\alpha+\beta i)+c\equiv 0$$

есть тождество. Преобразуемъ его такъ:

$$a(\alpha^2+\beta^2 i^2+2\alpha\beta i)+b\alpha+b\beta i+c\equiv 0;$$

$$a\alpha^2-a\beta^2+2a\alpha\beta i+b\alpha+b\beta i+c\equiv 0, \text{ или}$$

$$(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)+(2a\alpha\beta+b\beta)i\equiv 0.$$

Для возможности существованія подобнаго тождества, необходимо (§ 146 *усл.* 1), чтобы порознь

$$a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c\equiv 0, \text{ и}$$

$$2a\alpha\beta i+b\beta i\equiv 0.$$

Вычитая эти тождества другъ изъ друга, получаемъ *тождество*:

$$a(\alpha^2-2\alpha\beta i-\beta^2)+b(\alpha-\beta i)+c\equiv 0, \text{ или}$$

$$a(\alpha-\beta i)^2+b(\alpha-\beta i)+c\equiv 0,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Примѣры. I. Составить квадратное ур-іе *съ вещественными коэффиціентами*, одинъ изъ корней котораго равнялся бы $5-2i$.

На основаніи послѣдней теоремы заключаемъ, что другой корень искомаго ур-ія будетъ $5+2i$, и слѣд., въ искомомъ ур-іи $x^2+px+q=0$ имѣемъ:

$$-p=(5+2i)+(5-2i)=10$$

$$q=(5+2i)\,.\,(5-2i)=29,$$

а потому искомое ур-іе будетъ:

$$x^2-10x+29=0.$$

II. Составить уравненіе *наименьшей степени* съ вещественными коэффиціентами, въ числѣ корней котораго были бы 1 и $2-i$.

Прежде всего опредѣляемъ, какая будетъ степень даннаго ур-ія. Первой степени оно не можетъ быть, такъ какъ ур-іе первой степени имѣетъ всего одинъ корень. Если-бы оно было второй степени, то имѣло-бы видъ:

$$x^2-(3-i)x+2-i=0,$$

т. е. коэффиціенты его не были-бы вещественны.

Поэтому наименьшая возможная степень ур-ія есть третья, причемъ третій корень его будетъ $2+i$. Чтобы составить искомое кубичное ур-іе, напишемъ сперва квадратное ур-іе съ веществ. коэф., имѣющее корень $2-i$ *). На основаніи доказанной теоремы, другой корень этого ур-ія будетъ $2+i$, и слѣд., ур-іе имѣетъ видъ:

$$x^2-4x+5=0.$$

Умноживъ лѣвую часть этого ур-ія на $x-1$, получаемъ искомое кубичное ур-іе:

$$(x-1)(x^2-4x+5)=0,$$

или

$$x^3-5x^2+9x-5=0.$$

154а. Теорема предыдущаго параграфа, доказанная только для квадратныхъ уравненій, имѣетъ примѣненіе и къ уравненіямъ высшихъ степеней, т. е., если уравненіе какой бы то ни было степени съ вещественными коэффиціентами имѣетъ комплексный корень $\alpha+\beta i$, то оно имѣетъ также и другой комплексный корень $\alpha-\beta i$, сопряженный съ первымъ.

Доказать эту теорему можно при помощи того же пріема, которымъ мы пользовались въ предыдущемъ параграфѣ.

Возьмемъ для примѣра кубичное уравненіе

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

коэффиціенты котораго суть вещественныя числа. Если это ур-іе имѣетъ корень $\alpha+\beta i$, то имѣемъ тождество:

$$a(\alpha+\beta i)^3+b(\alpha+\beta i)^2+c(\alpha+\beta i)+d\equiv 0,$$

или, открывъ скобки:

$$a\alpha^3-a\beta^3 i+3a\alpha^2\beta i-3a\alpha\beta^2+b\alpha^2-b\beta^2+2b\alpha\beta i+c\alpha+c\beta i+d\equiv 0.$$

---

*) Можно поступить и иначе: на основаніи § 7 искомое уравненіе будетъ:

$$(x-1)[x-(2-i)][x-(2+i)]=0.$$

На основаніи условія 1 (§ 146) тождество это разбивается па два:

$$a\alpha^3-3a\alpha\beta^2+b\alpha^2-b\beta^2+c\alpha+d\equiv0$$

и

$$-a\beta^3i+3a\alpha^2\beta i+2b\alpha\beta i+c\beta i\equiv0.$$

Вычитая второе изъ перваго, получимъ новое тождество:

$$a\alpha^3+a\beta^3i-3a\alpha^2\beta i-3a\alpha\beta^2+b\alpha^2-b\beta^2-2b\alpha\beta i+c\alpha-c\beta i+d\equiv0,$$

или

$$a(\alpha-\beta i)^3+b(\alpha-\beta i)^2+c(\alpha-\beta i)+d\equiv0.$$

Послѣднее тождество показываетъ, что комплексное число $(\alpha-\beta i)$ также служитъ корнемъ даннаго уравненія, т. е. теорема доказана.

ПРИМѢРЫ. 1. Составить ур-іе наименьшей степени съ вещественными коэффиціентами, въ числѣ корней котораго находились бы 3, $1-i$ и $2+3i$.

Рѣшеніе. Такъ какъ искомое ур-іе должно по условію имѣть вещественные коэффиціенты, то на основаніи доказанной теоремы заключаемъ, что комплексному корню $1-i$ долженъ соотвѣтствовать сопряженный комплексный корень $1+i$, и что кромѣ корня $2+3i$, ур-іе должно имѣть еще корень $2-3i$. Итого, всѣхъ корней будетъ 5, т. е. искомое ур-іе будетъ *пятой степени*, и на основаніи теоремы § 7 напишется такъ:

$$(x-3)[x-(1-i)][x-(1+i)][x-(2+3i)][x-(2-3i)]=0.$$

2. Подобнымъ же образомъ получимъ, что ур-іе съ вещественными коэффиціентами, имѣющее корни $5+2i$ и $4-3i$ будетъ имѣть видъ:

$$[x-(5+2i)][x-(5-2i)][x-(4-3i)][x-(4+3i)]=0.$$

III. БИКВАДРАТНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

155. Биквадратными уравненіями называются ур-ія вида:

$$ax^4+bx^2+c=0,$$

гдѣ a, b и c суть нѣкоторые *коэффиціенты*, т. е. выраженія, не содержащія буквы x.

Рѣшеніе этихъ уравненій легко приводится къ рѣшенію ур-ій квадратныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $x^2=y$, а слѣд., $x^4=y^2$, преобразовываемъ данное ур-іе въ квадратное:

$$ay^2+by+c=0.$$

Послѣднее ур-іе даетъ для y два корня.

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

а слѣдовательно, для x находимъ слѣдующія значенія:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Полученный результатъ показываетъ, что биквадратное уравненіе имѣетъ *четыре корня*, которые по два имѣютъ равныя численныя значенія, но противоположные знаки. Отсюда вытекаетъ **ТЕОРЕМА**:

Если биквадратное уравненіе имѣетъ корень, равный α, то оно имѣетъ также корень, равный $(-\alpha)$.

156. Итакъ, рѣшеніе биквадратнаго уравненія

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad (1)$$

приводится къ рѣшенію двухъ квадратныхъ уравненій:

$$ay^2+by+c=0 \qquad (2)$$

и

$$x^2=y. \qquad (3).$$

Назовемъ корни ур-ія (2) буквами α и β; тогда

$$x_1=+\sqrt{\alpha};\ x_2=-\sqrt{\alpha};\ x_3=+\sqrt{\beta};\ x_4=-\sqrt{\beta}.$$

Лѣвая часть ур-ія (2) можетъ быть представлена въ видѣ произведенія:

$$a(y-\alpha)(y-\beta).$$

Подставивъ сюда x^2 вмѣсто y, представимъ лѣвую часть ур-ія (1) въ видѣ:

$$a(x^2-\alpha)(x^2-\beta),$$

или

$$a(x-\sqrt{\alpha})\,(x+\sqrt{\alpha})\,(x-\sqrt{\beta})\,(x+\sqrt{\beta}).$$

Такъ какъ $\pm\sqrt{\alpha}$ и $\pm\sqrt{\beta}$ суть корни даннаго биквадратнаго ур-ія (1), то послѣднимъ результатомъ доказана **ТЕОРЕМА:**

Лѣвая часть биквадратнаго уравненія равна коэффиціенту при четвертой степени буквы x, умноженному на произведеніе четырехъ двучленовъ, равныхъ разностямъ между буквой x и каждымъ изъ корней.

Результатъ этотъ, впрочемъ, вытекаетъ и непосредственно изъ § 7.

157. Доказанная теорема даетъ возможность составлять биквадратныя уравненія по заданнымъ корнямъ ихъ.

1. Пусть требуется, напримѣръ, составить биквадратное уравненіе, въ числѣ корней котораго были бы 2 и 3. На основаніи теоремы параграфа 155, заключаемъ, что другіе два корня искомаго уравненія будутъ (—2) и (—3), а потому это ур-іе будетъ:

$$(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)=0,$$

или, открывъ скобки:

$$x^4-13x^2+36=0.$$

2. Составить биквадратное ур-іе съ вещественными коэффиціентами, зная его корень $2-3i$.

На основаніи теоремы § 154a, заключаемъ, что, для вещественности коэффиціентовъ, ур-іе должно имѣть корень сопряженный съ заданнымъ, т. е. $2+3i$. Кромѣ того, по свойству корней биквадратнаго ур-ія (§ 155) оно должно имѣть еще корни $[-(2-3i)]$ и $[-(2+3i)]$.

Итого, всѣ четыре корня будутъ:

$$2-3i;\ 2+3i;\ -2+3i;\ -2-3i,$$

а потому ур-іе напишется такъ:

$$[x-(2-3i)][x-(2+3i)][x-(-2+3i)][x-(-2-3i)]=0,$$

или $$[(x-2)+3i][(x-2)-3i][(x+2)-3i][(x+2)+3i]=0,$$

или $$[(x-2)^2+9]\,[(x+2)^2+9])=0,$$

или $$[x^2-4x+13][x^2+4x+13]=0,$$

или, наконецъ $(x^2+13)^2-16x^2=0$, т. е. $x^4+10x^2+169=0$.

3. Составить биквадратное ур-іе съ раціональными коэффиціентами, зная его корень $1+\sqrt{2}$.

Такъ какъ коэффиціенты по условію должны быть раціональны, то корню $(1+\sqrt{2})$ долженъ соотвѣтствовать сопряженный корень, т. е. $(1-\sqrt{2})$. Другіе два корня будутъ (на основаніи § 155):

$$-(1+\sqrt{2}) \text{ и } -(1-\sqrt{2}).$$

Поэтому искомое ур-іе напишется такъ:

$$[x-(1+\sqrt{2})][x-(1-\sqrt{2})][x-(-1-\sqrt{2})][x-(-1+\sqrt{2})]=0.$$

Преобразовывая лѣвую часть, получаемъ:

$$[(x-1)-\sqrt{2}][(x-1)+\sqrt{2}][(x+1)+\sqrt{2}][(x+1)-\sqrt{2}]=0;$$

$$[(x-1)^2-2][(x+1)^2-2]=0;\ (x^2-2x-1)(x^2+2x-1)=0;$$

$$[(x^2-1)-2x][(x^2-1)+2x]=0;\ (x^2-1)^2-4x^2=0,$$

или, наконецъ $x^4-6x^2+1=0$.

Примѣры для упражненій. Составить биквадратныя уравненія, въ числѣ корней которыхъ были бы:

a) $\sqrt{5}$ и 1. *Отв.* $x^4-6x^2+5=0$.

b) -3 и $\sqrt{3}$. *Отв.* $x^4-12x^2+27=0$.

c) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{5}$. *Отв.* $x^4-7x^2+10=0$.

d) 5, 3 и 2 *Отв.* Невозможно.

II. Составить биквадратныя ур-ія съ раціональными коэффиціентами, имѣющія корни:

a) $4-\sqrt{5}$. *Отв.* $x^4-42x^2+121=0$.

b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. *Отв.* $x^4-10x^2+1=0$.

c) $\sqrt{7}$ и $2+\sqrt{5}$. *Отв.* Невозможно.

III. Составить биквадратныя ур-ія съ вещественными коэффиціентами, имѣющія корни:

a) $5-2i$. *Отв.* $x^4-42x^2+841=0$.

b) $3+i$. *Отв.* $x^4-16x^2+100=0$.

c) 5 и $7-i$. *Отв.* Невозможно.

158. Такъ какъ корни биквадратнаго уравненія, по два, равны по численной величинѣ, но противоположны по знаку, то отсюда непосредственно получаемъ первую зависимость между корнями биквадратнаго уравненія:

Сумма всѣхъ четырехъ корней биквадратнаго уравненія равна нулю.

Такъ какъ изъ ур-ія (2) (§ 156) слѣдуетъ:

$$(+\sqrt{\alpha})\cdot(-\sqrt{\alpha})\cdot(+\sqrt{\beta})\cdot(-\sqrt{\beta})=\alpha\beta=\frac{c}{a},$$

то получаемъ вторую зависимость между корнями биквадратнаго уравненія:

Произведеніе всѣхъ четырехъ корней биквадратнаго уравненія равно свободному члену, раздѣленному на коэффиціентъ при четвертой степени буквы x.

159. Итакъ, для нахожденія корней биквадратнаго уравненія

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad (1)$$

приходится извлекать квадратные корни изъ чиселъ α и β, гдѣ α и β суть корни квадратнаго уравненія

$$ay^2+by+c=0. \qquad (2).$$

Поэтому мы можемъ установить слѣдующія истины:

1. *Всякому* **мнимому** *значенію* y *изъ уравненія* (2) *соотвѣтствуютъ* **два мнимыхъ** *корня уравненія* (1).

2. *Всякому* **вещественному положительному** *значенію* y *изъ уравненія* (2) *соотвѣтствуютъ* **два вещественныхъ** *корня уравненія* (1).

3. *Всякому* **вещественному отрицательному** *значенію* y *изъ уравненія* (2) *соотвѣтствуютъ* **два мнимыхъ** *корня ур-ія* (1).

160. Положимъ, что въ биквадратномъ уравненіи (1), а слѣдовательно, и въ квадратномъ уравненіи (2), всѣ коэффиціенты a, b, c суть вещественныя числа, причемъ a есть число положительное, *) и займемся изслѣдованіемъ зависимости между коэффиціентами и корнями биквадратнаго уравненія.

---

*) Если a отрицательно, то можемъ перемѣнить знаки у всѣхъ коэффиціентовъ на обратные.

Замѣтимъ при этомъ прежде всего слѣдующее: такъ какъ каждая пара корней бикв. ур-ія отличается другъ отъ друга только лишь знаками (§ 155), то всякое бикв. ур-іе можетъ имѣть только **четное число** вещественныхъ и мнимыхъ корней, т. е. невозможенъ, напр., такой случай, что изъ четырехъ корней три будутъ вещественны, а только одинъ мнимый.

Поэтому возможны всего лишь слѣдующіе случаи рѣшеній:

I. Бикв. ур-іе имѣетъ всѣ четыре корня вещественные.

II. » » » два корня веществ. и два мнимые.

III. » » » всѣ четыре корня мнимые.

Разсмотримъ всѣ эти случаи въ отдѣльности.

I. Если всѣ четыре корня биквадратнаго ур-ія

$$ax^4+bx^2+c=0$$

вещественны, то это возможно только лишь въ томъ случаѣ, если оба корня квадратнаго ур-ія

$$ay^2+by+c=0$$

суть числа вещественныя, и притомъ положительныя (§ 159, *прав.* 2). Но изъ теоріи квадратныхъ ур-ій («Алг. Киселева» § 201 и § 197, слѣдствіе 2) мы знаемъ, что для этого необходимо соблюденіе слѣдующихъ условій:

$$b^2-4ac\geqslant 0;\ \ c>0 \text{ и } b<0.$$

Итакъ, биквадратное ур-іе имѣетъ четыре вещественныхъ корня, если разность (b^2-4ac) есть число положительное или нуль, причемъ свободный членъ c положителенъ, а коэффиціентъ b при второй степени неизвѣстнаго— отрицателенъ.

Таково, напр., ур-іе $3x^4-8x^2+1=0$.

II. Если два корня биквадратнаго ур-ія

$$ax^4+bx^2+c=0$$

вещественны, а другіе два мнимы, то это возможно лишь въ томъ случаѣ, если изъ двухъ корней квадратнаго ур-ія

$$ay^2+by+c=0$$

одинъ есть число вещественное и положительное (§ 159, *прав.* 2), а другой корень отрицателенъ (§ 159, *прав.* 3). Но изъ теоріи квадратныхъ ур-ій извѣстно, что уравненіе $ay^2+by+c=0$ имѣетъ одинъ корень положительный, а другой отрицательный, если свободный членъ $c<0$. Итакъ, биквадратное ур-іе имѣетъ два вещественныхъ и два мнимыхъ корня въ томъ случаѣ, если свободный членъ его отрицателенъ.

Таково, напр., ур-іе $2x^4+9x^2-7=0$.

III. Наконецъ, всѣ четыре корня биквадратнаго ур-ія

$$ax^4+bx^2+c=0$$

будутъ мнимыми въ одномъ изъ слѣдующихъ двухъ случаевъ: или, если оба корня квадратнаго ур-ія

$$ay^2+by+c=0$$

суть числа мнимыя (§ 159, *прав.* 1), т. е. если $b^2-4ac<0$, или же, если оба корня квадратнаго ур-ія $ay^2+by+c=0$ суть числа вещественныя и отрицательныя (§ 159, *прав.* 3), что, какъ извѣстно изъ теоріи квадратныхъ ур-ій, будетъ имѣть мѣсто при соблюденіи условій:

$$c>0 \text{ и } b>0.$$

Такъ, напр., всѣ 4 корня ур-ія $5x^4-7x^2+3=0$ будутъ мнимы, ибо разность $(-7)^2-4\,.\,5\,.\,3=-11<0$.

Также всѣ 4 корня ур-ія $2x^4+9x^2+4=0$ мнимы, потому что свободный членъ и коэффиціентъ при квадратѣ неизвѣстнаго оба положительны.

161. Повторяя все сказанное въ предыдущемъ параграфѣ, можно дать общее **правило:**

I. *Биквадратное уравненіе $ax^4+bx^2+c=0$ имѣетъ четыре вещественныхъ корня, если коэффиціентъ c положителенъ, коэффиціентъ b отрицателенъ, и кромѣ того, разность (b^2-4ac) положительна.*

II. *Биквадратное уравненіе* $ax^4+bx^2+c=0$ *имѣетъ два корня вещественныхъ и два мнимыхъ, если коэффиціентъ с отрицателенъ* *).

III. *Биквадратное ур-іе* $ax^4+bx^2+c=0$ *имѣетъ четыре мнимыхъ корня,* 1) *если разность* (b^2-4ac) *отрицательна, или же* 2) *независимо отъ знака этой разности, если оба коэффиціента b и c положительны.*

162. Изъ предыдущаго легко вывести слѣдующее **правило** для опредѣленія вида корней биквадратнаго уравненія $ax^4+bx^2+c=0$ въ зависимости отъ коэффиціентовъ уравненія:

Прежде всего надо обратить вниманіе на знакъ свободнаго члена (c). Если c отрицательно, то два корня вещественны и два мнимы.

Если c положительно, то смотримъ на b; если b тоже положительно, то всѣ четыре корня мнимы.

Если же при положительномъ c, коэффиціентъ b отрицателенъ, то тогда, при $b^2-4ac>0$, всѣ корни вещественны, а при $b^2-4ac<0$, всѣ корни мнимы **).

163. Примѣры. 1. Уравненіе

$$5x^4+7x^2-11=0$$

имѣетъ два корня вещественныхъ и два мнимыхъ, такъ какъ коэффиціентъ c отрицателенъ (—11).

2. Уравненіе

$$3x^4+7x^2+1=0$$

имѣетъ четыре мнимыхъ корня, такъ какъ коэффиціенты его b (7) и c (1) оба положительны.

3. Уравненіе

$$2x^4-15x^2+6=0$$

имѣетъ 4 вещественныхъ корня, такъ какъ $15^2-4\,.\,2\,.\,6>0$, и кромѣ того, коэффиціентъ c (6) положителенъ, а коэффиціентъ b (—15) отрицателенъ.

---

*) Въ этомъ случаѣ нѣтъ надобности добавлять, что (b^2-4ac) должно быть положительнымъ числомъ, ибо при отрицательномъ c разность эта непремѣнно положительна.

**) Надо не забывать, что всѣ эти правила даны для случая положительнаго a. (См. § 160).

Примѣры для упражненія. Опредѣлить видъ корней слѣдующихъ биквадратныхъ уравненій:

4. $3x^4-7x^2+11=0$. *Отв.* 4 мним.
5. $2x^2-5x^4+7=0$. *Отв.* 2 вещ., 2 мним.
6. $5-7x^2-11x^4=0$. *Отв.* 2 вещ., 2 мним.
7. $x^4-21x^2+7=0$. *Отв.* 4 вещ.
8. $x^4-3x^2-15=0$. *Отв.* 2 вещ., 2 мним.
9. $2x^4+7x^2+8=0$. *Отв.* 4 мним.

164. Изъ предыдущаго видно, что корни биквадратнаго уравненія

$$ax^4+bx^2+c=0$$

представляются подъ видомъ:

$$\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}},$$

$$\text{гдѣ } A=-\frac{b}{2a};\quad B=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Выраженія подобнаго вида, если B не представляетъ квадрата раціональнаго числа, очень неудобны для вычисленій съ извѣстной степенью точности, такъ какъ при этомъ приходится извлекать корень изъ приближеннаго значенія несоизмѣримаго числа. Попытаемся, если окажется возможнымъ, замѣнить выраженіе такого вида другимъ, не имѣющимъ зтихъ неудобствъ, а именно попробуемъ преобразовать его въ алгебраическую сумму двухъ квадратныхъ радикаловъ.

Итакъ, вопросъ, который мы себѣ задаемъ, заключается въ слѣдующемъ:

Дано выраженіе вида:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}},$$

гдѣ A и B суть числа вещественныя и соизмѣримыя, причемъ B есть положительное число, не представляющее собой квадрата какого либо раціональнаго числа, такъ что $\sqrt{B}$ есть число ирраціональное. Спрашивается, возможно ли представить выраженіе $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ въ видѣ суммы $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, гдѣ x и y *вещественныя, положительныя* и *раціональныя числа.*

Для отвѣта на этотъ вопросъ, напишемъ уравненіе:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}. \qquad (1).$$

Очевидно, что одного этого уравненія недостаточно для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ x и y; поэтому надо попытаться найти еще одну зависимость между этими же неизвѣстными.

Для этого докажемъ предварительно двѣ леммы.

165. ЛЕММА I. *Равенство вида*

$$A+\sqrt{B}=C+\sqrt{D},$$

гдѣ числа A, B, C, D раціональны, а корни $\sqrt{B}$ и $\sqrt{D}$ ирраціональны, возможно только въ томъ случаѣ, если порознь $A=C$ и $B=D$.

Допустимъ противное; пусть, напр., A не равно C, такъ что

$$A=C+\alpha.$$

Тогда

$$C+\alpha+\sqrt{B}=C+\sqrt{D},$$

или

$$\alpha+\sqrt{B}=\sqrt{D}.$$

Возвышая обѣ части въ квадратъ, получаемъ:

$$\alpha^2+2\alpha\sqrt{B}+B=D,$$

откуда

$$\sqrt{B}=\frac{D-\alpha^2-B}{2\alpha},$$

т. е. несоизмѣримое число $\sqrt{B}$ равно соизмѣримой дроби, что невозможно. Итакъ, необходимо допустить, что $A=C$, но тогда и $B=D$.

166. ЛЕММА II. *Если имѣетъ мѣсто равенство:*

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

гдѣ A, B, x, y, суть числа соизмѣримыя, то непремѣнно имѣетъ мѣсто и равенство:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y},$$

и наоборотъ.

Дѣйствительно, если

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

то, возведя обѣ части въ квадратъ, получаемъ:

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}. \qquad (1).$$

Равенство это показываетъ, что $\sqrt{xy}$ есть число ирраціональное, такъ какъ въ противномъ случаѣ оказалось бы, что ирраціональное число $\sqrt{B}$ равно раціональному числу $x+y+2\sqrt{xy}-A$.

Поэтому, для возможности равенства (1), необходимо по предыдущей леммѣ существованіе равенствъ:

$$A=x+y;$$

$$\sqrt{B}=2\sqrt{xy}.$$

Вычитая послѣднія равенства одно изъ другого, получаемъ:

$$A-\sqrt{B}=x+y-2\sqrt{xy},$$

откуда

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

167. Доказавши эти леммы, мы можемъ возвратиться къ поставленному выше (§ 164) вопросу:

Найти вещественныя, раціональныя, положительныя значенія чиселъ x и y, удовлетворяющія уравненію:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}. \qquad (1).$$

На основаніи леммы II (§ 166) можемъ сказать, что, если числа x и y удовлетворяютъ равенству (1), то они должны удовлетворять также и равенству

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}. \qquad (2).$$

Перемножая эти два равенства, находимъ:

$$\sqrt{A^2-B}=x-y. \qquad (3).$$

Возвышая ур-іе (1) въ квадратъ, и принимая во вниманіе лемму I (§ 165), можемъ написать:

$$A=x+y. \qquad (4).$$

Изъ ур-ій (3) и (4), складывая и вычитая, находимъ:

$$x=\frac{1}{2}\left(A+\sqrt{A^2-B}\right),$$

$$y=\frac{1}{2}\left(A-\sqrt{A^2-B}\right),$$

а потому можемъ написать:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{1}{2}(A+\sqrt{A^2-B})}+\sqrt{\frac{1}{2}(A-\sqrt{A^2-B})}.$$

Очевидно, что подобное преобразованіе имѣетъ смыслъ только тогда, если $\sqrt{A^2-B}$ *есть число раціональное*, т. е. *если разность*

$$A^2-B$$

есть **точный квадратъ** *нѣкотораго раціональнаго числа C.*

Въ этомъ случаѣ полученная формула принимаетъ видъ:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(A+C)}+\sqrt{\frac{1}{2}(A-C)}\right]^{*)}.$$

Очевидно также, что $\sqrt{A-\sqrt{B}}$ можетъ быть представленъ въ видѣ разности двухъ радикаловъ:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(A+C)}-\sqrt{\frac{1}{2}(A-C)}\right]^{*)}.$$

Отсюда слѣдуетъ:

Если (A^2-B) есть квадратъ нѣкотораго раціональнаго числа C, то выраженіе вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ преобразовывается въ сумму или разность двухъ квадратныхъ корней изъ раціональныхъ чиселъ:

$$\frac{1}{2}(A+C) \text{ и } \frac{1}{2}(A-C).$$

---

*) Двойной знакъ правой части соотвѣтствуетъ положительному и отрицательному значеніямъ радикала, стоящаго въ лѣвой части.

168. Примѣры. Преобразовать радикалы:

1. $\sqrt{7+\sqrt{40}}$. Здѣсь $A=7$; $B=40$; $A^2-B=9=3^2$, а потому преобразованіе возможно:

$$\sqrt{7+\sqrt{40}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(7+3)}+\sqrt{\frac{1}{2}(7-3)}\right]=\pm(\sqrt{5}+\sqrt{2}).$$

2. $\sqrt{17-2\sqrt{70}}$. Здѣсь $A=17$; $B=280$; $A^2-B=9=3^2$

Слѣдовательно, получаемъ:

$$\sqrt{17-2\sqrt{70}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(17+3)}-\sqrt{\frac{1}{2}(17-3)}\right]=\pm(\sqrt{10}-\sqrt{7}).$$

3. $\sqrt{10+5\sqrt{3}}$. Здѣсь $A=10$, $B=75$; $A^2-B=25=5^2$.

Поэтому имѣемъ:

$$\sqrt{10+5\sqrt{3}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(10+5)}+\sqrt{\frac{1}{2}(10-5)}\right]=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{15}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\pm(\sqrt{3}+1).\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

4. $\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}$. Здѣсь $A=2r^2$; $B=4r^4-a^2r^2$; $A^2-B=a^2r^2=(ar)^2$, слѣд., находимъ:

$$\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}=\sqrt{\frac{1}{2}(2r^2+ar)}-\sqrt{\frac{1}{2}(2r^2-ar)}=$$

$$=\sqrt{r\left(r+\frac{a}{2}\right)}-\sqrt{r\left(r-\frac{a}{2}\right)}.$$

Примѣчаніе. Формула эта, какъ извѣстно изъ Геометріи, служитъ для нахожденія стороны правильнаго вписаннаго въ кругъ многоугольника о $2n$ сторонахъ по даннымъ радіусу круга r и сторонѣ прав. многоугольника о n сторонахъ. Напр., сторона прав. двѣнадцатиугольника, вписаннаго въ кругъ, радіуса r, равна;

$$\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}=r\left[\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right].$$

169. Итакъ, мы видимъ, что преобразованіе сложнаго радикала $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ въ сумму двухъ радикаловъ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ выгодно только тогда, если (A^2-B) есть точный квадратъ. Посмотримъ, что выражаетъ послѣднее условіе въ примѣненіи къ корнямъ биквадратнаго уравненія $ax^4+bx^2+c=0$. Въ этомъ случаѣ (§ 164) имѣемъ:

$$A=-\frac{b}{2a};\ B=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Поэтому разность (A^2-B) равна:

$$\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=\frac{c}{a}.$$

Итакъ, оказывается, что

Корни биквадратнаго уравненія $ax^4+bx^2+c=0$ могутъ быть представлены въ видѣ алгебраической суммы двухъ простыхъ радикаловъ только въ томъ случаѣ, если $\frac{c}{a}$ есть **точный квадратъ.**

170. Примѣры. I. Дано биквадратное уравненіе:

$$2x^4-9x^2+8=0.$$

Здѣсь $c=8$; $a=2$; $\frac{c}{a}=4=2^2$; слѣдов., корни этого уравненія допускаютъ преобразованіе. Рѣшая ур-іе, находимъ:

$$x=\pm\sqrt{\frac{9\pm\sqrt{17}}{4}}.$$

Здѣсь $A=\frac{9}{4}$; $B=\frac{17}{16}$; $A^2-B=\frac{64}{16}=2^2$; слѣд.,

$$x=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+2\right)}\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}-2\right)}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{17}{8}}\pm\sqrt{\frac{1}{8}}\right)=$$

$$=\pm\frac{(\sqrt{17}\pm1)}{2\sqrt{2}}.$$

II. Также корни ур-ія $18x^4-45x^2+2=0$ могутъ быть представлены въ видѣ:

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{57}\pm\sqrt{33}).$$

III. Также корни ур-ія $ax^4+2(a-2b)x^2+a=0$ могутъ быть представлены въ видѣ:

$$x=\pm\frac{(\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a})}{\sqrt{a}}.$$

IV. ВОЗВРАТНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

171. Опредѣленія. Различаютъ два вида возвратныхъ уравненій четвертой степени.

I. *Возвратными уравненіями перваго рода* называются уравненія вида:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,$$

т. е. такія полныя уравненія четвертой степени, у которыхъ коэффиціенты при членахъ, равноотстоящихъ отъ начала и конца, равны между собой по величинѣ и одинаковы по знаку.

II. *Возвратными уравненіями второго рода* называются уравненія вида:

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0,$$

т. е. такія полныя уравненія четвертой степени, у которыхъ коэффиціенты при членахъ, равноотстоящихъ отъ начала и конца, равны между собой, причемъ коэффиціенты при *нечетныхъ* степеняхъ неизвѣстнаго отличаются другъ отъ друга знаками.

172. Нетрудно показать, что рѣшеніе возвратныхъ уравненій приводится къ рѣшенію двухъ квадратныхъ уравненій.

Возьмемъ уравненіе перваго рода:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0. \qquad (I)$$

Прежде всего замѣтимъ, что въ этомъ уравненіи x не можетъ равняться нулю, такъ какъ предположеніе $x=0$ приводитъ къ абсурду: $a=0$. Поэтому x неравенъ нулю, и мы имѣемъ право раздѣлить ур-іе (I) на x^2. Получаемъ:

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0,$$

или, соединяя члены съ одинаковыми коэффиціентами:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Если обозначимъ $x+\frac{1}{x}=y$, то $x^2+\frac{1}{x^2}+2x\cdot\frac{1}{x}=y^2$,

откуда $$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Уравненіе (I) принимаетъ теперь видъ:

$$a(y^2-2)+by+c=0, \text{ или}$$

$$ay^2+by+(c-2a)=0.$$

Послѣднее уравненіе есть уравненіе, квадратное относительно y, и слѣд., оно даетъ для y два корня. Пусть эти корни будутъ α и β. Подставляя найденныя значенія α и β вмѣсто y въ уравненіе:

$$x+\frac{1}{x}=y, \text{ получаемъ:}$$

$$x^2-\alpha x+1=0, \quad (1)$$

$$x^2-\beta x+1=0. \quad (2).$$

Каждое изъ этихъ уравненій даетъ по два корня для x, слѣд., всего корней будетъ **четыре**.

Итакъ, можно сказать:

Возвратное уравненіе перваго рода

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

имѣетъ четыре рѣшенія, которыя получаются, какъ корни двухъ квадратныхъ уравненій:

$$x^2-\alpha x+1=0$$

$$\text{и } x^2-\beta x+1=0,$$

гдѣ буквами α и β *обозначены корни уравненія:*

$$ay^2+by+(c-2a)=0.$$

173. При помощи такого же пріема рѣшаются и возвратныя уравненія второго рода.

Такъ какъ въ уравненіи

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$$

x равняться нулю не можетъ, то мы имѣемъ право раздѣлить уравненіе на x^2. Тогда получимъ:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Пусть

$$x-\frac{1}{x}=y.$$

Тогда $x^2+\frac{1}{x^2}-2x\cdot\frac{1}{x}=y^2$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$.

Уравненіе принимаетъ теперь видъ:

$$a(y^2+2)+by+c=0,$$

$$\text{или } ay^2+by+(c+2a)=0.$$

Пусть корни этого уравненія будутъ: $y_1=\alpha$, $y_2=\beta$. Тогда для нахожденія x имѣемъ два уравненія:

$$x^2-\alpha x-1=0$$

$$\text{и } x^2-\beta x-1=0,$$

откуда получаются четыре значенія для x.

Итакъ, можно сказать:

Возвратное уравненіе второго рода

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$$

имѣетъ четыре рѣшенія, которыя получаются, какъ корни двухъ квадратныхъ уравненій:

$$x^2-\alpha x-1=0,$$

$$x^2-\beta x-1=0,$$

гдѣ буквами α и β обозначены корни уравненія:

$$ay^2+by+(c+2a)=0.$$

174. Примѣры. Рѣшить слѣдующія возвратныя уравненія.

I. $$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0.$$

Уравненіе это *перваго рода* (такъ какъ знаки при нечетныхъ степеняхъ x одинаковы).

Дѣлимъ ур-іе на x^2, (на что мы имѣемъ право, ибо x въ этомъ ур-іи нулю равняться не можетъ):

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0.$$

Если $$x+\frac{1}{x}=y, \text{ то } x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Поэтому уравненіе принимаетъ видъ:

$$6(y^2-2)-35y+62=0, \text{ или}$$

$$6y^2-35y+50=0.$$

Корни послѣдняго уравненія суть:

$$y_1=\frac{10}{3} \text{ и } y_2=\frac{5}{2}.$$

Поэтому, для нахожденія x служатъ уравненія:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}, \text{ откуда } x_1=3;\ x_2=\frac{1}{3};$$

и $$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}, \text{ откуда } x_3=2;\ x_4=\frac{1}{2}.$$

II. $$2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0.$$

Уравненіе это *второго рода*. Для рѣшенія его поступаемъ совершенно такъ же, какъ въ предыдущемъ случаѣ. Дѣлимъ на x^2:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x-\frac{1}{x}\right)-4=0.$$

Если $x-\frac{1}{x}=y$, то $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$. Слѣд., ур-іе принимаетъ видъ:

$$2(y^2+2)-3y-4=0, \text{ или } 2y^2-3y=0,$$

откуда
$$y_1=0,\ y_2=\frac{3}{2}.$$

Для нахожденія x служатъ теперь два уравненія:

$$x-\frac{1}{x}=0, \text{ откуда } x_1=1;\ x_2=-1;$$

$$x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}, \text{ откуда } x_3=2;\ x_4=-\frac{1}{2}.$$

III. $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$. *Отв.* $x_1=1$; $x_2=1$; $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

IV. $x^4-3x^3-\frac{4}{9}x^2+3x+1=0$. *Отв.* $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{85}}{6}$;

$$x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}.$$

175. ТЕОРЕМА I. Если возвратное уравненіе перваго рода имѣетъ корень, равный m, то оно имѣетъ также и корень, равный $\frac{1}{m}$, т. е. обратный первому.

Пусть
$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \tag{1}$$

будетъ возвратное ур-іе перваго рода, имѣющее корень, равный m. Попробуемъ въ это уравненіе подставить вмѣсто x величину $\frac{1}{m}$. Получается:

$$a\left(\frac{1}{m}\right)^4+b\left(\frac{1}{m}\right)^3+c\left(\frac{1}{m}\right)^2+b\left(\frac{1}{m}\right)+a=\frac{a}{m^4}+\frac{b}{m^3}+$$
$$+\frac{c}{m^2}+\frac{b}{m}+a=\frac{a+bm+cm^2+bm^3+am^4}{m^4}.$$

Послѣднее выраженіе представляетъ дробь, знаменатель которой есть конечная величина m^4, а числитель представляетъ результатъ подстановки въ данное ур-іе (1) корня m вмѣсто x, т. е. нуль. Слѣд., эта дробь тождественно равна нулю.

Итакъ, результатъ подстановки въ данное ур-іе (1) количества $\frac{1}{m}$, вмѣсто x, тождественно равенъ нулю, т. е. $\frac{1}{m}$ есть *корень* даннаго уравненія.

176. Теорему предыдущаго параграфа можно доказать и иначе. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что значенія корней возвратнаго ур-ія

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \tag{1}$$

находятся (§ 172) изъ рѣшенія квадратныхъ уравненій:

$$x^2-\alpha x+1=0, \tag{2}$$

$$x^2-\beta x+1=0, \tag{3}$$

гдѣ α и β суть корни ур-ія:

$$ay^2+by+(c-2a)=0.$$

Въ обоихъ уравненіяхъ (2) и (3) свободный членъ, *равный произведенію искомыхъ корней*, есть 1, а это и доказываетъ предложенную теорему.

177. ТЕОРЕМА II. Если возвратное уравненіе второго рода имѣетъ корень, равный m, то оно имѣетъ также и корень, равный $\left(-\frac{1}{m}\right)$.

Пусть

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0 \tag{1}$$

будетъ возвратное ур-іе второго рода, имѣющее одинъ корень, равный m. Попробуемъ подставить въ это ур-іе величину $\left(-\frac{1}{m}\right)$ вмѣсто x. Получаемъ:

$$a\left(-\frac{1}{m}\right)^4+b\left(-\frac{1}{m}\right)^3+c\left(-\frac{1}{m}\right)^2-b\left(-\frac{1}{m}\right)+a=$$

$$=\frac{a}{m^4}-\frac{b}{m^3}+\frac{c}{m^2}+\frac{b}{m}+a=\frac{a-bm+cm^2+bm^3+am^4}{m^4}.$$

Послѣднее выраженіе представляетъ дробь, знаменатель которой есть конечная величина m^4, а числитель представляетъ собой результатъ подстановки въ данное уравненіе (1) корня m вмѣсто x. Слѣдовательно, дробь эта тождественно равна нулю. Итакъ, подстановка въ данное ур-іе (1) количества $\left(-\frac{1}{m}\right)$, вмѣсто x, обращаетъ ур-іе въ тождество. Слѣд., $\left(-\frac{1}{m}\right)$ есть корень даннаго уравненія.

178. Теорему предыдущаго параграфа можно доказать и иначе. Мы знаемъ, что значенія корней возвратнаго уравненія

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$$

находятся (§ 173) изъ рѣшенія квадратныхъ уравненій:

$$x^2-\alpha x-1=0, \qquad (2)$$

$$x^2-\beta x-1=0, \qquad (3)$$

гдѣ α и β суть корни уравненія:

$$ay^2+by+(c+2a)=0.$$

Въ обоихъ уравненіяхъ (2) и (3) свободный членъ, *равный произведенію искомыхъ корней*, есть (—1), а это и доказываетъ предложенную теорему.

179. Итакъ, если намъ даны два корня возвратнаго ур-ія перваго рода, напр., m и n, то другіе два корня его будутъ $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$.

Если даны два корня возвратнаго ур-ія второго рода, напр., m и n, то другіе два корня его будутъ $\left(-\frac{1}{m}\right)$ и $\left(-\frac{1}{n}\right)$.

Въ обоихъ случаяхъ произведеніе всѣхъ четырехъ корней будетъ:

I. $$m\,.\,n\,.\,\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=+1.$$

II. $$m\,.\,n\,.\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)=+1.$$

Слѣд., имѣемъ зависимость:

Произведеніе всѣхъ четырехъ корней возвратнаго уравненія, какъ перваго, такъ и второго рода, всегда равно положительной единицѣ.

179a. Въ § 179 доказано, что произведеніе всѣхъ четырехъ корней возвратнаго ур-ія всегда равно положительной единицѣ. Можно вывести еще и другія зависимости между коэффиціентами и корнями, при помощи слѣдующаго пріема.

Пусть какое угодно ур-іе четвертой степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

имѣетъ корни α, β, γ и δ.

На основаніи изложеннаго въ § 7, заключаемъ, что лѣвая часть этого ур-ія можетъ быть представлена въ видѣ произведенія

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta).$$

Такимъ образомъ, имѣемъ равенство:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta),$$

или, дѣля обѣ части на a:

$$x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta).$$

Перемножаемъ правую часть по извѣстному способу составленія произведенія двучленовъ съ равными первыми членами (см. „Алгебру Киселева“ § 306):

$$x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=$$

$$=x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta.$$

Такъ какъ правая и лѣвая части этого равенства представляютъ двѣ формы одного и того-же выраженія, то коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ неизвѣстнаго должны быть въ обѣихъ частяхъ тождественны. Такимъ образомъ, получаемъ рядъ равенствъ:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\frac{c}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-\frac{d}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\alpha\beta\gamma\delta=\frac{e}{a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

что даетъ слѣдующія **общія зависимости** между коэффиціентами и корнями всякаго ур-ія четвертой степени *).

*) Очевидно, что вполнѣ аналогичныя зависимости можно получить и для ур-ія всякой другой степени.

1. Сумма всѣхъ четырехъ корней ур-ія равна взятому съ обратнымъ знакомъ отношенію коэфф. при x^3 къ коэфф. при x^4.

2. Сумма произведеній корней этого ур-ія, взятыхъ по два, равна отношенію коэфф. при x^2 къ коэфф. при x^4.

3. Сумма произведеній корней этого ур-ія по три равна отношенію коэфф. при x^1 къ коэфф. при x^4, взятому съ обратнымъ знакомъ.

4. Произведеніе всѣхъ четырехъ корней равно отношенію свободнаго члена къ коэффиціенту при x^4.

Примѣняя выведенныя соотношенія къ возвратному ур-ію

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,$$

имѣющему корни α, β, $\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{\beta}$, имѣемъ:

$$\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{a};$$

$$\alpha\beta+\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\alpha\cdot\frac{1}{\beta}+\beta\cdot\frac{1}{\alpha}+\beta\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{c}{a} \text{ и т. д.}$$

Напр., въ § 174 мы рѣшили возвратное ур-іе

$$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$$

и нашли его корни 3, $\frac{1}{3}$, 2 и $\frac{1}{2}$. Сумма ихъ $3+\frac{1}{3}+2+\frac{1}{2}=5\frac{5}{6}=\frac{35}{6}$, т. е равна взятому съ обратнымъ знакомъ отношенію коэффиціента (—35) при x^3 къ коэффиціенту (6) при x^4 и т. д.

180. На основаніи § 7, лѣвая часть возвратнаго уравненія можетъ быть разложена на множителей:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=a(x-m)(x-n)\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(x-\frac{1}{n}\right),$$

для уравненій *перваго рода*, и

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=a(x-m)(x-n)\left(x+\frac{1}{m}\right)\left(x+\frac{1}{n}\right),$$

для уравненій *второго рода*.

Т. е., лѣвая часть возвратнаго уравненія равна коэффиціенту при четвертой степени буквы x, умноженному на произведеніе четырехъ двучленовъ, равныхъ разностямъ между буквой x и каждымъ изъ корней.

Это свойство даетъ возможность *составлять возвратное уравненіе по даннымъ корнямъ его.*

Составимъ для примѣра возвратное уравненіе, въ числѣ корней котораго были бы 3, 2 и $\frac{1}{3}$.

Такъ какъ данные корни 3 и $\frac{1}{3}$ имѣютъ одинаковые знаки, то искомое уравненіе будетъ **перваго рода**, и четвертый корень его равенъ $\frac{1}{2}$. Это уравненіе напишется такъ:

$$(x-3)(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0,$$

или, открывая скобки въ лѣвой части и приводя къ одному знаменателю:

$$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0.$$

181. Примѣры для упражненій. Составить возвратныя уравненія, въ числѣ корней которыхъ были бы:

I. $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, 5. *Отв.* $10x^4-77x^3+150x^2-77x+10=0$.

II. $2, -3, \frac{1}{2}$. *Отв.* $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$

III. $1, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 1$. *Отв.* $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$.

IV. $\frac{1+\sqrt{10}}{3}$, $\frac{1-\sqrt{10}}{3}$, $\frac{7-\sqrt{85}}{6}$. *Отв.* $9x^4-27x^3-$ $-4x^2+27x+9=0$.

V. ДВУЧЛЕННЫЯ УРАВНЕНІЯ.

182. *Двучленными уравненіями* называются уравненія вида:

$$ax^n+b=0, \qquad (1)$$

гдѣ a и b суть нѣкоторые коэффиціенты, т. е. выраженія, не содержащія x.

Раздѣливъ это уравненіе на a и обозначивъ

$$-\frac{b}{a}=A,$$

приводимъ уравненіе къ виду:

$$x^n-A=0. \qquad (2).$$

Рѣшить послѣднее уравненіе значитъ **найти всѣ значенія корня n-овой степени изъ числа A.**

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (2) равносильно слѣдующему:

$$x^n = A,$$

откуда видно, что всякій корень уравненія есть такое число, которое, будучи возведено въ n-овую степень, даетъ A. Итакъ, *вопросы о нахожденіи всѣхъ корней двучленнаго уравненія* $x^n - A = 0$, *и о нахожденіи всѣхъ значеній корня n-овой степени изъ числа A суть вопросы* **равнозначущіе.**

183. ТЕОРЕМА. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій, вида $x^n - A = 0$, приводится къ рѣшенію двучленныхъ уравненій, вида $y^n \pm 1 = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что мы какимъ нибудь образомъ нашли *одно* изъ значеній корня n-овой степени изъ числа A, напр., *ариѳметическое значеніе* *).

Пусть этотъ ариѳметическій корень изъ числа A будетъ α. Подставимъ въ уравненіе (2) αy вмѣсто x; тогда это уравненіе приметъ видъ:

$$\alpha^n y^n - A = 0. \qquad (3)$$

Но $\alpha^n = +A$, или $= -A$, такъ какъ α есть ариѳметическій корень n-овой степени изъ числа A. Поэтому ур-іе (3) можно переписать такъ:

$$y^n \mp 1 = 0.$$

Найдя отсюда y, будемъ знать и x изъ равенства $x = \alpha \cdot y$.

184. Итакъ, вопросъ о нахожденіи всѣхъ n значеній корня n-овой степени изъ числа A разбивается на три отдѣльныхъ дѣйствія; а именно, нужно:

1°. Найти ариѳметическое значеніе корня n-овой степени изъ числа A; пусть это значеніе будетъ α.

2°. Найти всѣ значенія корня n-овой степени изъ положительной или отрицательной единицы. (Другими словами, рѣшить двучленное уравненіе: $y^n \mp 1 = 0$).

---

*) *Ариѳметическимъ значеніемъ* корня n-овой степени изъ числа A называется то положительное значеніе корня, которое находится путемъ непосредственнаго извлеченія корня n-овой степени изъ абсолютной величины числа A.

3°. Каждое изъ найденныхъ значеній корня n-овой степени изъ единицы надо умножить на ариѳметическое значеніе корня n-овой степени изъ числа A, т. е. на α.

Изъ этихъ трехъ дѣйствій намъ приходится теперь изучить вновь только второе.

Итакъ, переходимъ къ рѣшенію уравненій вида:

$$y^n - 1 = 0. \qquad \text{(I)}$$

$$y^n + 1 = 0. \qquad \text{(II)}.$$

185. Прежде всего, нетрудно убѣдиться въ слѣдующихъ истинахъ:

1°. **При четномъ** n уравненіе (I) имѣетъ **два вещественныхъ** корня, равныхъ по абсолютной величинѣ, но противоположныхъ по знакамъ.

2°. **При четномъ** n уравненіе (II) не имѣетъ **ни одного вещественнаго** корня.

3°. **При нечетномъ** n уравненіе (I) имѣетъ **одинъ вещественный, положительный** корень.

4°. **При нечетномъ** n уравненіе (II) имѣетъ **одинъ вещественный, отрицательный** корень.

Кромѣ того, нетрудно доказать слѣдующее свойство ур-ій (I) и (II):

5°. **При всякомъ нечетномъ значеніи** n, **корни уравненій** (I) **и** (II) **отличаются другъ отъ друга только знаками.**

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр., ур-іе (II) удовлетворяется значеніемъ $y=\alpha$, такъ что α^n+1 тождественно равно нулю. Попробуемъ въ ур-іе (I) вмѣсто y подставить $(-\alpha)$. Получаемъ: $(-\alpha)^n-1$. Но при n нечетномъ $(-\alpha)^n=-\alpha^n$, а слѣд., ур-іе (I) принимаетъ видъ: $-\alpha^n-1=-(\alpha^n+1)$, что тождественно равно нулю. Итакъ, если α есть корень ур-ія (II), то $(-\alpha)$ есть корень ур-ія (I), и наоборотъ, что и требовалось доказать.

186. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій

$$y^n - 1 = 0, \qquad \text{(I)}$$

$$y^n + 1 = 0, \qquad \text{(II)}$$

при помощи элементарной Алгебры, возможно только въ очень немногихъ частныхъ случаяхъ, напр., при $n=2$, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 и нѣкоторыхъ другихъ.

Но изъ тѣхъ примѣровъ, рѣшеніе которыхъ для насъ доступно, мы убѣдимся, что каждое изъ ур-ій (I) и (II) имѣетъ n различныхъ значеній; слѣд., и корень n-овой степени изъ числа A будетъ имѣть тоже n различныхъ значеній. Отсюда слѣдуетъ:

ТЕОРЕМА. Корень n-овой степени изъ числа A имѣетъ n различныхъ значеній, которыя найдемъ, умноживъ послѣдовательно всѣ n корней уравненій (I) или (II) на ариѳметическое значеніе корня α.

187. Переходимъ теперь къ рѣшенію ур-ій (I) и (II) для нѣкоторыхъ значеній n.

I. Показатель $n=2$. Уравненія (I) и (II) принимаютъ видъ:

$y^2-1=0$, или $(y+1)(y-1)=0$, откуда $y_1=-1$, $y_2=+1$.

$y^2+1=0$, или $(y+i)(y-i)=0$, откуда $y_1=-i$, $y_2=+i$.

II. Показатель $n=3$. Уравненія: $y^3-1=0$ и $y^3+1=0$.

Уравненіе $y^3-1=0$ разлагается на множителей:

$$y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)=0,$$

и слѣдов., распадается на два ур-ія:

$y-1=0$, т. е. $y_1=1$; $y^2+y+1=0$, т. е. $y_{2,3}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Итакъ, уравненіе $y^3-1=0$ имѣетъ три корня:

$$y_1=1;\ y_2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2};\ y_3=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Нетрудно непосредственнымъ возвышеніемъ въ кубъ убѣдиться, что $(y_2)^3=1$ и $(y_3)^3=1$.

Уравненіе

$$y^3+1=0,$$

на основанiи § 185 (5°), имѣетъ корни, отличающiеся отъ корней ур-iя $y^3-1=0$ *только знаками*. Поэтому значенiя корней кубичныхъ изъ отрицательной единицы будутъ:

$$y_1=-1;\ y_2=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2};\ y_3=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Нетрудно, впрочемъ, рѣшить ур-iе $y^3+1=0$ и непосредственно, написавъ его въ видѣ:

$$(y+1)(y^2-y+1)=0,$$

и рѣшивъ отдѣльно уравненiя: $y+1=0$, и $y^2-y+1=0$.

III. Показатель $n=4$. Уравненiя: $y^4-1=0$ и $y^4+1=0$. Уравненiе $y^4-1=0$ разлагается на множителей:

$$(y^2+1)(y^2-1)=0,$$

и слѣд., распадается на два ур-iя: $y^2+1=0$ и $y^2-1=0$, рѣшенiя которыхъ мы имѣли выше. Итакъ, четыре значенiя корня 4-ой степени изъ положительной единицы суть:

$$y_1=1;\ y_2=-1;\ y_3=+i;\ y_4=-i.$$

Уравненiе же

$$y^4+1=0$$

рѣшается такъ: разсматривая лѣвую часть, какъ два члена квадрата $(y^2+1)^2$, *дополняемъ ур-iе до полнаго квадрата:*

$$(y^4+2y^2+1)-2y^2=0, \text{ или}$$

$$(y^2+1)^2-(y\sqrt{2})^2=0, \text{ или } (y^2+1+y\sqrt{2})(y^2+1-y\sqrt{2})=0.$$

Уравненiе это распадается на два отдѣльныхъ уравненiя:

$$y^2+y\sqrt{2}+1=0, \text{ откуда } y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i);$$

и $$y^2-y\sqrt{2}+1=0, \text{ откуда } y=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i).$$

Итакъ, четыре значенія корня четвертой степени изъ отрицательной единицы суть:

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);\ y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);\ y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

$$y_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

IV. Показатель $n=5$. Уравненія: $y^5-1=0$ и $y^5+1=0$.

Уравненіе

$$y^5-1=0$$

разлагается на множителей:

$$(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)=0,$$

откуда или $y-1=0$, т. е. $y_1=1$, или же

$$y^4+y^3+y^2+y+1=0.$$

Рѣшаемъ это *возвратное уравненіе* по общимъ правиламъ. Дѣлимъ на y^2:

$$\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+1=0.$$

Обозначая $y+\frac{1}{y}=z$, получаемъ: $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$, и слѣд., уравненіе это принимаетъ видъ:

$$z^2+z-1=0,$$

откуда $z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Рѣшая уравненія:

$$y+\frac{1}{y}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$y+\frac{1}{y}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

находимъ для y четыре мнимыхъ корня:

$$y_{1,2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$y_{3,4}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\pm\frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Итакъ, уравненіе $y^5-1=0$ имѣетъ 5 корней: одинъ вещественный, равный 1, и четыре мнимыхъ.

Что касается уравненія

$$y^5+1=0,$$

то корни его на основаніи § 185 (5°) будутъ равны по величинѣ и противоположны по знаку корнямъ уравненія $y^5-1=0$. Но можно рѣшить это уравненіе и непосредственно, разложеніемъ на множителей:

$$y^5+1=(y+1)(y^4-y^3+y^2-y+1)=0.$$

V. Показатель $n=6$. Уравненія: $y^6-1=0$ и $y^6+1=0$.

Уравненіе

$$y^6-1=0$$

разлагается на множителей:

$y^6-1=(y^3+1)(y^3-1)=0$, и слѣд., распадается на два:

$$y^3+1=0 \text{ и } y^3-1=0.$$

Оба эти уравненія мы рѣшали раньше § 187 (II), а потому шесть значеній корня шестой степени изъ положительной единицы суть:

$$y_1=1;\ y_2=-1;\ y_3=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2};\ y_4=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2};$$

$$y_5=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2};\ y_6=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравненіе же $y^6+1=0$ рѣшается такъ:

$$(y^2)^3+(1)^3=(y^2+1)(y^4-y^2+1)=0.$$

Слѣдовательно, ур-іе это распадается на два:

$$y^2+1=0, \text{ откуда } y=\pm i, \text{ и}$$

$$y^4-y^2+1=0, \text{ откуда } y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}}.$$

VI. Показатель $n=8$. Уравненіе $y^8-1=0$ разлагается на множителей:

$$(y^4+1)(y^4-1)=0, \text{ откуда}$$
$$y^4+1=0, \text{ или же } y^4-1=0.$$

Оба эти уравненія мы уже рѣшали. Каждое изъ нихъ даетъ по четыре корня, а слѣд., всего корней будетъ *восемь*.

VII. Показатель $n=10$. Уравненіе $y^{10}-1=0$ распадается на два отдѣльныхъ уравненія:

$$y^{10}-1=(y^5+1)(y^5-1)=0, \text{ т. е.,}$$
$$\text{или } y^5+1=0, \text{ или } y^5-1=0.$$

Оба эти уравненія мы уже рѣшали. Каждое изъ нихъ даетъ по 5 значеній y, а слѣд., всего корней будетъ *десять*.

VIII. Показатель $n=12$. Уравненіе $y^{12}-1=0$ распадается на два:

$$y^{12}-1=(y^6+1)(y^6-1)=0, \text{ откуда, или}$$
$$y^6+1=0, \text{ или } y^6-1=0.$$

Оба эти уравненія мы уже рѣшали. Каждое изъ нихъ даетъ по 6 значеній y, а слѣд., всего корней будетъ *двѣнадцать*.

Этими случаями рѣшенія двучленныхъ уравненій мы ограничимся.

187a. Примѣры примѣненія двучленныхъ уравненій.

1. Рѣшить уравненіе:

$$x^4+256=0.$$

Поступая согласно изложенному въ § 183 и 184, находимъ ариѳметическое значеніе корня четвертой степени изъ 256, равное 4, и вводимъ вспомогательное неизвѣстное

$$x=4y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a).$$

Подставляя это значеніе въ данное ур-іе, имѣемъ:

$$(4y)^4+256=0, \text{ или } 256y^4+256=0.$$

Сокративъ на 256, приводимъ задачу къ рѣшенію двучленнаго уравненія

$$y^4+1=0,$$

корни котораго, какъ выведено въ § 187 (III), будутъ

$$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);\ y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);\ y_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

$$y_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (a), получаемъ:

$$x_1=2\sqrt{2}(-1+i);\ x_2=-2\sqrt{2}(1+i);\ x_3=2\sqrt{2}(1+i);$$

$$x_4=2\sqrt{2}(1-i).$$

2. Рѣшить уравненіе:

$$x^3-27=0.$$

Такъ какъ ариѳметическое значеніе кубичнаго корня изъ 27 равно 3, то вводимъ вспомогательное неизвѣстное

$$x=3y \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Слѣдовательно, данное ур-іе принимаетъ видъ:

$$(3y)^3-27=0, \text{ или } 27y^3-27=0, \text{ или, наконецъ}$$

$$y^3-1=0.$$

Рѣшая это ур-іе, находимъ его корни (§ 187, II):

$$y_1=1;\ y_2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2};\ y_3=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому изъ ур-ія (a) получаемъ:

$$x_1=3;\ x_2=-\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2};\ x_3=-\frac{3}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}.$$

3. Найти всѣ значенія корня десятой степени изъ 1024.

Обозначая буквой x искомые корни, имѣемъ ур-іе:

$$x=\sqrt[10]{1024}, \text{ или } x^{10}-1024=0.$$

Такъ какъ ариѳм. значеніе корня десятой степени изъ 1024 равно 2, то принимаемъ

$$x=2y\ .\ .\ .\ .\ .\ (a)$$

и переписываемъ данное ур-іе такъ:

$$(2y)^{10}-1024=0, \text{ или } 1024y^{10}-1024=0, \text{ или, наконецъ}$$

$$y^{10}-1=0.$$

Рѣшая это ур-іе, какъ указано въ § 187, VII, найдемъ десять значеній для y, а подставляя каждое изъ нихъ въ ур-іе (a), получимъ всѣ десять значеній для x § 184)

VI. Квадратныя уравненія съ двумя неизвѣстными.

188. Общій видъ уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными содержитъ слѣдующіе члены: члены съ квадратами обоихъ неизвѣстныхъ, съ произведеніемъ ихъ, съ первыми степенями обоихъ неизвѣстныхъ и свободные члены. Слѣдовательно, всякое уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными можетъ быть приведено къ виду:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

гдѣ числа a, b, c, d, e, f суть коэффиціенты, т. е. выраженія, не содержащія неизвѣстныхъ.

Системой уравненій второй степени съ двумя или нѣсколькими неизвѣстными называютъ такую систему, въ которой, по крайней мѣрѣ, одно уравненіе второй степени, а остальныя—или первой, или второй степени.

189. *Если изъ системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, одно уравненіе* **первой степени**, *то такая система* **всегда разрѣшима**.

Возьмемъ, напр., систему:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0, \qquad (1)$$

$$mx+ny=p. \qquad (2)$$

Изъ уравненія (2) опредѣляемъ:

$$y=\frac{p-mx}{n}$$

и подставляемъ это значеніе въ ур-іе (1):

$$ax^2+bx\left(\frac{p-mx}{n}\right)+c\left(\frac{p-mx}{n}\right)^2+dx+e\left(\frac{p-mx}{n}\right)+f=0.$$

По раскрытіи всѣхъ скобокъ, получимъ уравненіе, квадратное относительно x. Изъ этого ур-ія найдемъ для x два значенія, а подставивъ эти значенія въ выраженіе для y:

$$y=\frac{p-mx}{n},$$

опредѣлимъ два соотвѣтствующихъ отвѣта для y.

Итакъ, предложенная система имѣетъ *двѣ пары рѣшеній*.

Примѣръ. Рѣшить систему:

$$x^2+2xy-3y^2-5x+7y=2,$$

$$2x+3y=7.$$

Изъ второго уравненія: $x=\frac{7-3y}{2}$.

Подставляя это значеніе въ первое уравненіе, получимъ послѣ открытія скобокъ квадратное уравненіе:

$$15y^2-44y+29=0,$$

откуда

$$y_1=1;\ y_2=\frac{29}{15}.$$

Слѣдовательно,

$$x_1=2;\ x_2=0{,}6.$$

190. *Если оба уравненія съ двумя неизвѣстными суть уравненія второй степени, то такая система приводится къ полному уравненію четвертой степени и потому*, **вообще, неразрѣшима.**

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ намъ дана система:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0, \qquad (1)$$

$$a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \qquad (2).$$

Если умножимъ уравненіе (1) на a_1 и уравненіе (2) на a и вычтемъ одно изъ другого, то получимъ:

$$Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (3)$$

гдѣ $B=ba_1-ab_1$; $C=ca_1-ac_1$ и т. д.

Опредѣляя изъ уравненія (3) x:

$$x=-\frac{F+Ey+Cy^2}{By+D}$$

и подставляя это значеніе въ уравненіе (1), получимъ полное уравненіе четвертой степени, которое въ общемъ видѣ въ окончательной формѣ неразрѣшимо элементарной Алгеброй.

191. Можетъ, впрочемъ, случиться, что полученное такимъ образомъ уравненіе четвертой степени будетъ уравненіе биквадратное, или возвратное, или, вообще, разрѣшимое при помощи какого-нибудь искусственнаго пріема. Въ этомъ частномъ и очень рѣдкомъ случаѣ изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія четвертой степени найдемъ четыре значенія для y, а слѣд., получимъ и четыре соотвѣтств. значенія для x.

Примѣръ. *Рѣшить систему:*

$$2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0, \qquad (1)$$

$$x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0. \qquad (2)$$

Умножая уравненіе (2) на 5, уравненіе (1) на 4, и вычитая одно изъ другого, исключимъ y^2, причемъ получится уравненіе:

$$x^2-10xy+6x-18y+21=0.$$

Изъ этого уравненія опредѣляемъ:

$$y=\frac{x^2+6x+21}{10x+18}. \qquad (3).$$

Подставивъ это значеніе y въ уравненіе (2), **получимъ** послѣ упрощеній биквадратное уравненіе:

$$x^4-10x^2+9=0.$$

Корни его суть:

$$x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=3;\ x_4=-3.$$

Подставляя найденныя значенія въ уравненіе (3), опредѣляемъ соотвѣтственныя значенія y:

$$y_1=1;\ y_2=2;\ y_3=1;\ y_4=-1.$$

Итакъ, данная система имѣетъ четыре пары рѣшеній:

$$\text{I.}\begin{cases}x=1.\\y=1.\end{cases}\ \text{II.}\begin{cases}x=-1.\\y=2.\end{cases}\ \text{III.}\begin{cases}x=3.\\y=1.\end{cases}\ \text{IV.}\begin{cases}x=-3.\\y=-1.\end{cases}$$

VII. РѢШЕНІЯ НѢКОТОРЫХЪ ПРОСТѢЙШИХЪ СИСТЕМЪ.
(§§ 192—197).

192. *Рѣшить систему*:

$$x+y=a;\ xy=b. \qquad (1).$$

Такъ какъ намъ даны сумма и произведеніе двухъ чиселъ x и y, то числа эти найдутся, какъ корни квадратнаго уравненія:

$$z^2-az+b=0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$z_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2};\ z_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Полученныя значенія z даютъ 2 пары рѣшеній для x и y:

$$\text{I.}\begin{cases}x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\\[2mm] y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\end{cases}\qquad \text{II.}\begin{cases}x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\\[2mm] y=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}.\end{cases}$$

Чтобы корни были вещественны, необходимо соблюденіе условія: $a^2\geqslant 4b$.

Примѣръ. Дана система:

$$x+y=22;\ xy=105.$$

Рѣшаемъ уравненіе:

$$z^2-22z+105=0.$$

Корни его суть: $z_1=15$, $z_2=7$. Итакъ:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x=15. \\ y=7. \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} x=7. \\ y=15. \end{cases}$$

193. *Рѣшить систему:*

$$x-y=a;\ xy=b. \qquad \textbf{(2).}$$

Система эта приводится къ предыдущей, если обозначить $u=-y$, такъ какъ тогда имѣемъ:

$$x+u=a;\ xu=-b.$$

Корни послѣдней системы суть:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \\ u=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} x=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \\ u=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \end{cases}.$$

Замѣняя u равной величиной $(-y)$, находимъ корни предложенной системы (2):

$$\text{I.}\ \begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \\ y=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} x=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \\ y=\dfrac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \end{cases}.$$

Чтобы корни были вещественны, необходимо соблюденіе условія: $a^2 \geqslant -4b$.

Примѣръ. Дана система: $x-y=7$; $xy=60$

Обозначая $u=-y$, получаемъ:

$$x+u=7;\ xu=-60.$$

Слѣд., x и u найдутся, какъ корни уравненія:

$$z^2-7z-60=0,$$

откуда $$z_1=12;\ z_2=-5.$$

Итакъ:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x=12. \\ u=-5. \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} x=-5. \\ u=12. \end{cases}$$

Замѣняя $y=-u$, получаемъ рѣшенія заданной системы:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x=12. \\ y=5. \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} x=-5. \\ y=-12. \end{cases}$$

194. *Рѣшить систему*:

$$x+y=a;\ x^2+y^2=b. \qquad (3).$$

Возвысивъ обѣ части перваго уравненія въ квадратъ и вычтя изъ результата второе уравненіе, найдемъ:

$$xy=\frac{a^2-b}{2}\cdot$$

Послѣ этого мы знаемъ: сумму неизвѣстныхъ: $x+y=a$ и произведеніе ихъ: $xy=\frac{a^2-b}{2}$, т. е. вопросъ свелся къ системѣ (1), разсмотрѣнной выше (§ 192).

Можно, впрочемъ, поступить и иначе:

Изъ уравненія $x^2+y^2=b$ вычитаемъ $2xy=a^2-b$.

Получаемъ: $(x-y)=\pm\sqrt{2b-a^2}$,

послѣ чего, складывая и вычитая уравненія:

$$x+y=a$$

$$x-y=\pm\sqrt{2b-a^2},$$

найдемъ двѣ пары значеній для x и y.

Примѣръ. Дана система: $x+y=14$; $x^2+y^2=106$.

Возвышая первое уравненіе въ квадратъ и вычитая второе, находимъ:

$$2xy=90.$$

Вычитая полученное уравненіе изъ второго изъ данныхъ, опредѣляемъ: $x-y=\pm 4$. Рѣшая системы:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x+y=14, \\ x-y=4, \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} x+y=14, \\ x-y=-4, \end{cases}$$

получаемъ двѣ пары рѣшеній:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x=9. \\ y=5. \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} x=5. \\ y=9. \end{cases}$$

195. *Рѣшить систему*:

$$x+y=a;\ x^2-y^2=b. \qquad (4).$$

Дѣля второе уравненіе на первое, находимъ разность неизвѣстныхъ: $x-y=\frac{b}{a}\cdot$ Слѣдовательно,

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{a}\right);\ y=\frac{1}{2}\left(a-\frac{b}{a}\right).$$

Примѣръ. Дана система: $x+y=16$; $x^2-y^2=96$.

Раздѣливъ, находимъ: $x-y=6$; слѣд., $x=11$, $y=5$.

196. *Рѣшить систему*:

$$x^2+y^2=a;\ xy=b. \qquad (5).$$

Умноживъ обѣ части второго уравненія на 2, сложивъ его съ первымъ уравненіемъ и вычтя изъ него, получаемъ:

$$x+y=\pm\sqrt{a+2b},$$

$$x-y=\pm\sqrt{a-2b}.$$

Назвавъ для краткости $\sqrt{a+2b}=M$, $\sqrt{a-2b}=N$, получаемъ *четыре системы*:

$$\text{I. } \begin{cases} x+y=M \\ x-y=N. \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} x+y=-M \\ x-y=-N. \end{cases} \quad \text{III. } \begin{cases} x+y=M \\ x-y=-N. \end{cases}$$

$$\text{IV. } \begin{cases} x+y=-M \\ x-y=N. \end{cases}$$

Рѣшивъ (сложеніемъ и вычитаніемъ) эти четыре системы, найдемъ 4 пары рѣшеній заданныхъ уравненій (5).

Примѣръ. *Рѣшить систему*:

$$x^2+y^2=245; \quad xy=98.$$

Умножая второе уравненіе на 2, складывая съ уравненіемъ первымъ и вычитая изъ него, получаемъ:

$$(x+y)^2=441, \text{ т. е. } x+y=\pm 21;$$

$$(x-y)^2=49, \text{ т. е. } x-y=\pm 7.$$

Рѣшаемъ четыре системы:

$$\text{I. } \begin{cases} x+y=21 \\ x-y=7. \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} x+y=-21 \\ x-y=-7. \end{cases} \quad \text{III. } \begin{cases} x+y=21 \\ x-y=-7. \end{cases}$$

$$\text{IV. } \begin{cases} x+y=-21 \\ x-y=7. \end{cases}$$

Соотвѣтственныя системы рѣшеній будутъ:

$$\text{I. } \begin{cases} x=14 \\ y=7. \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} x=-14 \\ y=-7. \end{cases} \quad \text{III. } \begin{cases} x=7 \\ y=14. \end{cases} \quad \text{IV. } \begin{cases} x=-7 \\ y=-14. \end{cases}$$

197. *Рѣшить систему*:

$$x^2-y^2=a; \qquad xy=b. \qquad (6).$$

Если возвести второе ур-іе въ квадратъ, то система

$$x^2-y^2=a; \qquad x^2y^2=b^2$$

есть та-же система (2) (§ 193) относительно неизвѣстныхъ x^2 и y^2. Слѣд., изъ полученныхъ ур-ій найдемъ сперва x^2 и y^2, а потомъ x и y. Но можно рѣшать эту систему и иначе:

Возводимъ оба данныя уравненія въ квадратъ и складываемъ ур-іе первое съ учетверенным уравненіемъ вторымъ. Получается:

$$(x^2+y^2)^2=a^2+4b^2.$$

Если требуется найти *только вещественныя* значенія x и y, то полученное уравненіе равносильно слѣдующему:

$$x^2+y^2=+\sqrt{a^2+4b^2}.$$

Въ болѣе же общемъ случаѣ, когда ищутся и мнимыя значенія корней, имѣемъ:

$$x^2-y^2=a,$$

$$x^2+y^2=\pm\sqrt{a^2+4b^2}.$$

Отсюда, складывая и вычитая, находимъ x^2 и y^2, а слѣд., и искомыя x и y.

Примѣръ. *Рѣшить систему:*

$$x^2-y^2=120; \quad xy=91.$$

Возводя оба уравненія въ квадратъ, получаемъ:

$$x^4+y^4-2x^2y^2=14400; \quad x^2y^2=8281.$$

Складывая учетверенное второе ур-іе съ первымъ, получаемъ:

$$(x^2+y^2)^2=47524,$$

откуда

$$x^2+y^2=\pm 218.$$

Если бы мы искали *только вещественныя* значенія неизвѣстныхъ, то должны были бы взять $x^2+y^2=+218$. Но въ общемъ случаѣ надо найти и мнимые корни.

Итакъ, мы имѣемъ:

$$\text{I.} \begin{cases} x^2+y^2=218 \\ x^2-y^2=120. \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} x^2+y^2=-218 \\ x^2-y^2=120. \end{cases}$$

Соотвѣтственно этимъ двумъ системамъ, получаемъ:

$$\text{I.} \begin{cases} x=\pm 13 \\ y=\pm\ 7. \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} x=\pm 7i \\ y=\pm 13i. \end{cases}$$

Такъ какъ каждое изъ неизвѣстныхъ можетъ принимать по четыре различныхъ значенія, то, казалось бы, что предложенная система уравненій допускаетъ цѣлыхъ восемь системъ рѣшеній. Но въ дѣйствительности она имѣетъ всего только *четыре* системы рѣшеній. Дѣло въ томъ, что изъ уравненія $xy=91$ видно, что произведеніе неизвѣстныхъ должно быть положительнымъ, а потому невозможны, напр., такія комбинаціи:

$$x=13 \text{ и } y=-7, \text{ или } x=7i \text{ и } y=13i,$$

такъ какъ произведенія xy въ этихъ случаяхъ оказались бы отрицательными.

Итакъ, имѣемъ всего слѣдующія четыре системы рѣшеній:

$$\text{I. } \begin{cases} x=13 \\ y=7 \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} x=-13 \\ y=-7 \end{cases} \quad \text{III. } \begin{cases} x=+7i \\ y=-13i \end{cases} \quad \text{IV. } \begin{cases} x=-7i \\ y=+13i. \end{cases}$$

197a. Очень часто бываетъ, что болѣе сложныя системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными могутъ быть приведены къ разобраннымъ выше (§§ 192—197) типамъ, какъ это видно на нижеслѣдующихъ примѣрахъ.

1. Рѣшить систему:

$$xy+x+y=a; \quad x^2y+y^2x=b.$$

Переписываемъ данныя ур-ія такъ:

$$xy+(x+y)=a; \quad xy.(x+y)=b,$$

или, обозначая $xy=z$ и $x+y=v$:

$$z+v=a; \quad z\,.\,v=b,$$

послѣ чего видимъ, что предложенная система привелась къ элементарной (§ 192).

Слѣдовательно, изъ квадратнаго уравненія

$$u^2-au+b=0$$

найдутся неизвѣстныя z и v, т. е. произведеніе xy и сумма $(x+y)$, послѣ чего, изъ составленнаго подобнымъ же образомъ квадр. ур-ія, опредѣлимъ искомыя x и y.

2. Рѣшить систему:

$$x+x^2+y+y^2=a;\quad x^3+x^2y+xy^2+y^3=b.$$

Переписываемъ заданныя ур-iя такъ:

$$(x+y)+(x^2+y^2)=a;\ x^2(x+y)+y^2(x+y)=b, \text{ или}$$

$$(x+y)(x^2+y^2)=b.$$

Обозначивъ теперь $(x+y)=z$ и $(x^2+y^2)=v$, имѣемъ:

$$z+v=a;\ z\,.\,v=b,$$

т. е., привели систему къ элементарной (§ 192).

Найдя z и v изъ квадратнаго уравненiя

$$u^2-au+b=0,$$

получимъ опять таки элементарную систему (§ 194), такъ какъ будутъ уже опредѣлены: сумма первыхъ степеней $(x+y)$ и сумма квадратовъ (x^2+y^2) неизвѣстныхъ.

3. Рѣшить систему:

$$x^4+y^4=a;\quad xy=b.$$

Возведя обѣ части второго ур-iя въ четвертую степень, имѣемъ:

$$x^4+y^4=a;\quad x^4y^4=b^4,$$

или, замѣняя $x^4=z$, $y^4=v$:

$$z+v=a;\ z\,.\,v=b^4,$$

т. е. система привелась къ элементарной, причемъ z и v найдутся, какъ корни квадр. ур-iя $u^2-au+b^4=0$ и т. д.

ГЛАВА XIII.

НЕОПРЕДѢЛЕННЫЯ УРАВНЕНІЯ.

198. **Неопредѣленными уравненіями первой степени съ двумя неизвѣстными** называются уравненія вида:

$$ax+by=c, \qquad (1)$$

гдѣ a, b, c суть нѣкоторые **коэффиціенты**, *т. е. выраженія, не содержащія неизвѣстныхъ.*

Рѣшивъ уравненіе (1) относительно какого угодно неизвѣстнаго, напр., y, получимъ формулу:

$$y=\frac{c-ax}{b},$$

въ которой буквѣ x можно давать какія угодно значенія, причемъ каждому *произвольному* значенію x отвѣчаетъ одно вполнѣ *опредѣленное* значеніе y.

Если, напр., y дѣлается равнымъ n, при $x=m$, то числа m и n составляютъ одну изъ *системъ рѣшеній* неопредѣленнаго уравненія (1).

Очевидно, что уравненіе это можетъ имѣть *безчисленное множество* системъ рѣшеній.

Обыкновенно вопросъ, приводящій къ неопредѣленному уравненію, требуетъ, чтобы неизвѣстныя x и y были числа *цѣлыя*, а иногда сюда, кромѣ того, присоединяется требованіе, чтобы они были положительны. Такимъ образомъ ставится вопросъ: изъ безчисленнаго множества системъ, удовлетворяющихъ уравненію (1), выдѣлить системы рѣшеній *въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ.* Подобное ограниченіе значительно уменьшаетъ неопредѣленность рѣшенія.

Разсмотримъ сперва рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія въ числахъ только **цѣлыхъ**.

199. Каковы бы ни были раціональные коэффиціенты заданнаго неопредѣленнаго уравненія, всегда можно это ур-іе замѣнить такимъ равносильнымъ ему уравненіемъ, въ которомъ коэффиціенты a, b и c будутъ числа **цѣлыя**. Для этого, въ случаѣ дробныхъ коэффиціентовъ, достаточно умножить обѣ части уравненія *на наименьшее кратное знаменателей данныхъ коэффиціентовъ.*

Поэтому, въ дальнѣйшемъ изложеніи мы имѣемъ право считать числа a, b, c числами цѣлыми.

Итакъ, спрашивается, всегда ли возможно рѣшить неопредѣленное уравненіе $ax+by=c$ въ *цѣлыхъ числахъ.*

Отвѣтомъ на этотъ вопросъ служатъ слѣдующія три теоремы (§§ 200, 201, 204).

200. ТЕОРЕМА I. Если коэффиціенты a и b неопредѣленнаго уравненія

$$ax+by=c$$

имѣютъ общаго множителя, на котораго c не дѣлится, то, уравненіе это не имѣетъ ни одной системы цѣлыхъ рѣшеній.

Доказательство. Положимъ, напр., что общій множитель чиселъ a и b равенъ k, такъ что $a=mk$; $b=nk$, гдѣ m и n суть *цѣлыя числа.*

Неопредѣленное уравненіе принимаетъ видъ:

$$mkx+nky=c,$$

или, по раздѣленіи обѣихъ частей уравненія на k:

$$mx+ny=\frac{c}{k}\cdot$$

Такъ какъ по условію теоремы $\frac{c}{k}$ есть дробь, то, очевидно, невозможно найти *цѣлыя* значенія для x и y, удовлетворяющія послѣднему равенству.

Примѣръ. Дано уравненіе $35x+91y=107$. Коэффиціенты при неизвѣстныхъ имѣютъ общаго множителя 7, на котораго 107 не дѣлится. Очевидно, что уравненіе

$$5x+13y=\frac{107}{7},$$

равносильное заданному (§ 126), не можетъ быть удовлетворено никакими *цѣлыми* значеніями неизвѣстныхъ.

201. ТЕОРЕМА II. Если коэффиціенты a и b неопредѣленнаго уравненія

$$ax+by=c$$

суть числа взаимно простыя, то неопредѣленное уравненіе допускаетъ по крайней мѣрѣ одну систему цѣлыхъ рѣшеній.

Доказательство. Выражая изъ даннаго уравненія одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого, получаемъ:

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

Будемъ послѣдовательно подставлять въ эту формулу вмѣсто y **всѣ натуральныя числа, меньшія чѣмъ** a, т. е., заключающіяся въ ряду:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ (a-2),\ (a-1), \qquad \text{(I)}$$

и каждый разъ будемъ вычислять соотвѣтственное значеніе для x. Для этого намъ придется каждый разъ находить разность между числомъ c и произведеніемъ by, и дѣлить эту разность на a. Докажемъ, что **всѣ остатки**, получаемые отъ послѣдняго дѣленія, **различны**.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы допустимъ, что при подстановкѣ вмѣсто y количествъ m и n изъ ряда (I) мы получаемъ *одинаковые* остатки, то разность

$$(c-bm)-(c-bn),$$

какъ разность двухъ равноостаточныхъ относительно a чиселъ, **должна непремѣнно раздѣлиться** безъ остатка на a *).

Но разность эта, равная

$$b(n-m),$$

не можетъ дѣлиться на a, такъ какъ по условію b и a суть числа взаимно простыя, а разность двухъ чиселъ (n и m), меньшихъ чѣмъ a, тоже дѣлиться на a не можетъ **).

---

*) На основаніи извѣстной ариѳметической теоремы. См. «Курсъ теор. Ариѳметики». Сост. П. Шмулевичъ § 48.

**) См. «Курсъ теор. Ариѳметики» § 68.

Итакъ, подставляя вмѣсто y въ формулу

$$x=\frac{c-by}{a}$$

a различныхъ натуральныхъ значеній:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ (a-1),$$

и выполняя каждый разъ дѣленіе разности $c-by$ на a, мы получимъ a **различныхъ остатковъ**. Каждый изъ этихъ остатковъ долженъ быть цѣлымъ числомъ, меньшимъ дѣлителя a.

Но всѣ цѣлыя числа, меньшія a, различныя между собой, число которыхъ равно a, суть числа:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ (a-1).$$

Слѣдовательно, въ числѣ остатковъ будетъ **непремѣнно одинъ, и притомъ только одинъ** остатокъ, равный нулю *). Поэтому заключаемъ, что для нѣкотораго **цѣлаго** значенія y, подставляемаго въ формулу

$$x=\frac{c-by}{a},$$

получается соотвѣтствующее **цѣлое** же значеніе x, т. е. уравненіе будетъ имѣть одну систему *цѣлыхъ* рѣшеній.

Итакъ, если a и b суть числа, первыя между собой, то неопредѣленное уравненіе непремѣнно имѣетъ систему цѣлыхъ рѣшеній.

202. Первый способъ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія въ цѣлыхъ числахъ. Изложенная теорема даетъ возможность находить *одну пару* рѣшеній неопредѣленнаго уравненія въ цѣлыхъ числахъ. Пусть, напр., дано уравненіе:

$$9x-4y=17.$$

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, если допустить, что ни одинъ изъ остатковъ не будетъ равенъ нулю, то всѣ остатки, какіе только возможны, будутъ:

$$1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .\ .\ (a-1),$$

т. е. всего получится $(a-1)$ *различныхъ* остатковъ, тогда какъ число ихъ должно быть равнымъ a.

Рѣшаемъ это уравненіе относительно того изъ неизвѣстныхъ, при которомъ находится численно меньшій коэффиціентъ, т. е. въ данномъ случаѣ относительно y:

$$y=\frac{9x-17}{4}.$$

Подставляя вмѣсто x рядъ натуральныхъ значеній отъ 0 до 3, мы можемъ на основаніи доказанной теоремы (§ 201) утверждать, что непремѣнно получимъ одно цѣлое рѣшеніе для y. Въ самомъ дѣлѣ, производя эти подстановки, получаемъ:

При $x=0$, $y=-\frac{17}{4}$ . . . . . . число нецѣлое.

» $x=1$, $y=-\frac{8}{4}=-2$ . . . . . число *цѣлое.*

Итакъ, одна система рѣшеній даннаго неопредѣленнаго уравненія въ цѣлыхъ числахъ есть: $x=1$, $y=-2$.

Этотъ пріемъ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія слѣдуетъ употреблять во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда коэффиціентъ при какомъ нибудь изъ неизвѣстныхъ есть число *небольшое*, такъ какъ при этомъ условіи не понадобится дѣлать много подстановокъ.

Примѣры. Найти при помощи этого пріема одну систему рѣшеній уравненій:

I. $4x+11y=37$. *Отв.* $y=3$; $x=1$.

II. $15x-4y=19$. *Отв.* $x=1$; $y=-1$.

III. $17x-2y=21$. *Отв.* $x=1$; $y=-2$.

203. Первая изъ вышеизложенныхъ теоремъ (§§ 200 и 201) говоритъ намъ, что условіе:

a **и** *b* **должны быть числами взаимно простыми**

есть условіе, **необходимое** для рѣшенія неопредѣленнаго уравненія въ **цѣлыхъ** числахъ.

Вторая теорема говоритъ, что условіе это **достаточно для** рѣшенія неопредѣленнаго уравненія въ **цѣлыхъ** числахъ.

204. На основаніи § 201 мы знаемъ, что если a и b суть числа взаимно простыя, то неопредѣленное уравненіе всегда имѣетъ одну систему цѣлыхъ рѣшеній, и знаемъ, какъ можно ее найти. Слѣдующая теорема даетъ возможность по одной найденной цѣлой системѣ найти *формулу, заключающую въ себѣ* всѣ *системы цѣлыхъ рѣшеній.*

ТЕОРЕМА III. Неопредѣленное уравненіе

$$ax+by=c,$$

въ которомъ a и b числа взаимно простыя, допускаетъ безчисленное множество цѣлыхъ рѣшеній; всѣ они заключаются въ формулахъ:

$$x=\alpha+b\,.\,t,\ \ y=\beta-a\,.\,t,$$

гдѣ α и β представляютъ одну какую нибудь систему цѣлыхъ рѣшеній, а t есть произвольное цѣлое число.

Такъ какъ по условію α и β суть корни даннаго уравненія, то подстановка ихъ въ это уравненіе даетъ тождество:

$$a\alpha+b\beta\equiv c.$$

Вычитая это тождество изъ даннаго уравненія, имѣемъ:

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0.$$

Представимъ это уравненіе подъ видомъ равенства двухъ дробей:

$$\frac{x-\alpha}{\beta-y}=\frac{b}{a}\ \ .\ .\ .\ .\ .\ \ (1).$$

Такъ какъ по условію теоремы, коэффиціенты a и b суть числа взаимно простыя, то дробь $\frac{b}{a}$ *несократима.* Но изъ Ариѳметики извѣстно, что несократимая дробь можетъ равняться нѣкоторой другой дроби только лишь въ томъ случаѣ, если числитель и знаменатель ея соотвѣтственно равнократны числителю и знаменателю данной несократимой дроби *).

*) См. «Курсъ теоретической Ариѳм.» сост. П. Шмулевичъ § 103.

На основанiи этой теоремы заключаемъ, что равенство (1) можетъ имѣть мѣсто только лишь въ томъ случаѣ, если

$$x-\alpha=b\,.\,t \text{ и}$$

$$\beta-y=a\,.\,t,$$

гдѣ t есть произвольное цѣлое число.

Отсюда получаемъ:

$$x=\alpha+b.t \text{ и } y=\beta-a.t.$$

Эти выраженiя даютъ *безчисленное множество* цѣлыхъ *рѣшенiй*: стоитъ только вмѣсто t подставлять произвольныя *цѣлыя* числа.

Такъ какъ t подчинено только лишь одному условiю, что оно должно быть *цѣлымъ числомъ*, то въ формулы для x и y можно вмѣсто t подставить $(-t)$, и тогда отвѣты для x и y принимаютъ видъ:

$$x=\alpha-b.t;\ y=\beta+a.t.$$

Какъ первая, такъ и вторая группы формулъ:

$$\text{I.}\begin{cases}x=\alpha+bt\\ y=\beta-at\end{cases}\qquad \text{II.}\begin{cases}x=\alpha-bt\\ y=\beta+at\end{cases}$$

составляются по одному и тому же закону:

Первый членъ въ нихъ равенъ всегда одному изъ корней, а вторые члены суть произведенiя **произвольнаго цѣлаго числа** *t на коэффицiентъ при y въ формулѣ для x, и на коэффицiентъ при x въ формулѣ для y; при этомъ одинъ изъ коэффицiентовъ входитъ въ формулу съ* **тѣмъ же знакомъ, съ которымъ онъ входитъ въ уравненiе, а другой—со знакомъ противоположнымъ тому, какой онъ имѣетъ въ уравненiи.**

Примѣръ. Выше (§ 202) мы нашли одну пару рѣшенiй неопредѣленнаго уравненiя

$$9x-4y=17,$$

а именно,

$$x=1;\ y=-2.$$

Поэтому **всѣ** цѣлыя рѣшенія заключаются въ формулахъ:

$$x=1-4t;\ y=-2-9t,$$

или, что одно и то-же:

$$x=1+4t;\ y=-2+9t.$$

Придавая въ любой группѣ этихъ формулъ буквѣ t какія угодно *цѣлыя значенія*, положительныя, или отрицательныя, получимъ сколько угодно паръ цѣлыхъ рѣшеній.

205. Изъ доказательства теоремы III ясно, что въ ней содержатся дѣйствительно **всѣ** цѣлыя рѣшенія. Непосредственной повѣркой нетрудно также показать, что всякое рѣшеніе, заключающееся въ формулахъ:

$$x=\alpha+b\,.\,t;\ y=\beta-a\,.\,t,$$

дѣйствительно удовлетворяетъ неопредѣленному уравненію $ax+by=c$. Въ самомъ дѣлѣ, подстановка даетъ:

$$a(\alpha+bt)+b(\beta-at)=a\alpha+b\beta,$$

что тождественно равно c, такъ какъ по условію α и β суть корни заданнаго уравненія.

206. При помощи изложеннаго выше (§ 202) метода нахожденія цѣлыхъ значеній для x и y, всегда возможно найти одну пару рѣшеній неопредѣленнаго уравненія, а слѣд., на основаніи § 204 и **всѣ** цѣлыя системы. Но указанный пріемъ выгодно употреблять только въ томъ случаѣ, если хоть одинъ изъ коэффиціентовъ a или b есть число *небольшое*, такъ какъ иначе пришлось-бы дѣлать слишкомъ много подстановокъ.

Поэтому, для нахожденія одной пары цѣлыхъ рѣшеній, пользуются обыкновенно другимъ способомъ, изложеннымъ ниже (§ 209).

207. Частные случаи рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій.

1°. Допустимъ, что коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ равняется *единицѣ*. Напр., пусть неопредѣленное уравненіе будетъ:

$$x+by=c.$$

Отсюда имѣемъ:

$$x=c-by.$$

Сдѣлавъ въ этомъ уравненіи $y=0$, получимъ для x цѣлое значеніе $x=c$. Слѣдовательно, одна изъ системъ рѣшеній будетъ: $x=c$, $y=0$. Всѣ же цѣлыя рѣшенія (§ 204), заключаются въ формулахъ:

$$x=c-bt;\ y=0+1.t=t.$$

Также, если коэффиціентъ при y равенъ единицѣ, то всѣ цѣлыя рѣшенія заключаются въ формулахъ:

$$x=t;\ y=c-at.$$

2°. Если свободный членъ равенъ нулю, то уравненіе имѣетъ видъ:

$$ax+by=0.$$

Одна изъ системъ рѣшеній будетъ, очевидно, $x=0$, $y=0$. Всѣ же вообще системы заключены въ формулахъ:

$$x=bt,\ y=-at.$$

208. На основаніи предыдущаго параграфа, мы видимъ, что если коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ равенъ единицѣ, то уравненіе рѣшается очень просто. Ниже будетъ доказано, что если коэффиціенты a и b при неизвѣстныхъ суть числа взаимно простыя, то *всегда возможно* привести рѣшеніе заданнаго уравненія $ax+by=c$ къ такому уравненію, въ которомъ одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ единицѣ.

209. Общій случай рѣшенія неопредѣленнаго уравненія.

Выяснимъ на какомъ либо численномъ примѣрѣ способъ нахожденія одной пары цѣлыхъ рѣшеній неопредѣленнаго уравненія.

Пусть дано, напримѣръ, уравненіе:

$$17x-37y=55. \qquad (1).$$

Рѣшаемъ это уравненіе относительно неизвѣстнаго, имѣющаго меньшій коэффиціентъ, т. е. въ данномъ случаѣ относительно x.

Получаемъ:

$$x=\frac{55+37y}{17}.$$

Исключивъ изъ правой части цѣлую алгебраическую часть, найдемъ:

$$x=3+2y+\frac{4+3y}{17}.$$

Полученное для x выраженіе состоитъ изъ двухъ частей: $(3+2y)$, которая будетъ цѣлой при всякомъ цѣломъ y, и дробной $\frac{4+3y}{17}$. Для того, чтобы x было цѣлымъ числомъ, необходимо выбрать такія цѣлыя значенія y, чтобы дробь

$$\frac{4+3y}{17}$$

была **цѣлымъ числомъ.**

Итакъ, положимъ:

$$\frac{4+3y}{17}=t,$$

гдѣ t есть произвольное цѣлое число.

Изъ послѣдняго равенства находимъ:

$$3y-17t=-4. \qquad (2).$$

Рѣшаемъ это уравненіе относительно неизвѣстнаго, имѣющаго меньшій коэффиціентъ, т. е. относительно y. Получаемъ:

$$y=\frac{17t-4}{3}.$$

Исключивъ цѣлую алгебраическую часть, найдемъ:

$$y=5t-1+\frac{2t-1}{3}.$$

Для того, чтобы y было числомъ цѣлымъ, необходимо для t подобрать такое цѣлое значеніе, чтобы

$$\frac{2t-1}{3}=t_1,$$

гдѣ t_1 есть произвольное цѣлое число.

Послѣднее равенство даетъ:

$$2t-3t_1=1. \qquad (3).$$

Рѣшаемъ это уравненіе относительно неизвѣстнаго съ меньшимъ коэффиціентомъ, т. е. t. Имѣемъ:

$$t=\frac{1+3t_1}{2}.$$

Исключивъ цѣлую алгебраическую часть, найдемъ:

$$t=t_1+\frac{1+t_1}{2}.$$

Для того, чтобы t было цѣлымъ числомъ, необходимо, чтобы

$$\frac{1+t_1}{2}=t_2,$$

гдѣ t_2 произвольное цѣлое число.

Изъ послѣдняго равенства получаемъ:

$$t_1-2t_2=-1. \qquad (4).$$

Въ послѣднемъ уравненіи коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ равенъ единицѣ, а потому мы его можемъ уже рѣшить (§ 207, 1°).

Мы получили слѣдующій рядъ уравненій:

$$17x - 37y = 55, \qquad (1).$$

$$3y - 17t = -4, \qquad (2).$$

$$2t - 3t_1 = 1, \qquad (3).$$

$$t_1 - 2t_2 = -1. \qquad (4).$$

Изъ уравненія (4) имѣемъ:

$$t_1 = 2t_2 - 1.$$

Одной изъ системъ рѣшеній этого уравненія будетъ система:

$$t_2 = 0;\ t_1 = -1.$$

Подставляя полученное значеніе t_1 въ уравненіе (3), находимъ: $t = -1$; подставляя это значеніе t въ ур-іе (2) получаемъ $y = -7$, и подставляя это значеніе y въ уравненіе (1), видимъ, что $x = -12$.

Итакъ,

$$x = -12,\ y = -7$$

есть *одна изъ системъ* рѣшеній заданнаго уравненія.

Общая же формула рѣшеній, на основаніи § 204, будетъ:

$$x = -12 + 37t;\ y = -7 + 17t,$$

гдѣ t есть *произвольное цѣлое число.*

210. Замѣчаніе. Вмѣсто того, чтобы въ уравненіи (4) опредѣлять численныя значенія t_1 и t_2, можно поступить и иначе. А именно, изъ ур-ія (4) имѣемъ:

$$t_1 = 2t_2 - 1.$$

Подставляя это значеніе t_1 въ ур-іе (3), получаемъ:

$$2t - 3(2t_2 - 1) = 1, \text{ откуда } t = -1 + 3t_2.$$

Подставляя это значеніе t въ ур-іе (2), получаемъ:

$3y - 17(-1 + 3t_2) = -4$, откуда $y = -7 + 17t_2$.

Подставляя это значеніе y въ ур-іе (1), находимъ:

$17x - 37(-7 + 17t_2) = 55$, откуда $x = -12 + 37t_2$.

Такимъ образомъ, мы получили:

$$y = -7 + 17t_2;\ x = -12 + 37t_2,$$

гдѣ t_2 есть произвольное цѣлое число и потому можетъ быть замѣнено просто буквой t.

Слѣдов., дѣлая подобныя подстановки, мы получаемъ для x и y непосредственно формулы, содержащія въ себѣ **сразу всѣ отвѣты**. Очевидно, что такой способъ подстановки только безполезно увеличиваетъ число вычисленій.

211. Разсматривая способъ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія въ § 209, замѣчаемъ, что вопросъ приводится къ послѣдовательному рѣшенію нѣсколькихъ уравненій, которыя суть:

1. Данное уравненіе:

$$17x - 37y = 55, \qquad (1)$$

т. е. вообще, уравненіе съ неизвѣстными x и y съ коэффиціентами при нихъ a и b.

2. Уравненіе:

$$3y - 17t = -4,$$

т. е. вообще, уравненіе съ неизвѣстными x и t (если $a > b$), или y и t (если $a < b$). Коэффиціенты его суть: a или b, и остатокъ r_1 отъ дѣленія a на b, или b на a.

3. Уравненіе:

$$2t - 3t_1 = 1,$$

т. е. вообще, уравненіе съ неизвѣстными t и t_1.

Коэффиціенты его суть: предыдущій остатокъ r_1 и остатокъ r_2 отъ дѣленія a, или b на r_1.

4. Уравненіе:

$$t_1 - 2t_2 = -1,$$

т. е. вообще, уравненіе съ неизвѣстными t_1 и t_2.

Коэффиціенты его суть: предыдущій остатокъ r_2 и остатокъ r_3 отъ дѣленія r_1 на r_2.

И такъ далѣе.

Изъ этого видно, **что процессъ рѣшенія приводитъ въ данномъ случаѣ къ такому же ряду дѣйствій, какой имѣлъ бы мѣсто при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ a и b по способу послѣдовательнаго дѣленія.** (См. «Курсъ теор. Ариѳм. § 61).

Но коэффиціенты a и b суть числа *вз.-простыя между собой*, а потому общій наибольшій дѣлитель ихъ равенъ *единицѣ*; слѣд., продолжая рядъ указанныхъ дѣленій, мы *непремѣнно дойдемъ до остатка, равнаго единицѣ*, который и будетъ коэффиціентомъ въ одномъ изъ получаемыхъ уравненій. Итакъ, мы непремѣнно получимъ уравненіе, въ которомъ коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ будетъ равенъ единицѣ, т. е. приведемъ вопросъ къ частному случаю, рѣшеніе котораго не представляетъ затрудненій (см. § 207; 1°).

212. Возможныя упрощенія. При рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій можно пользоваться всѣми способами, ведущими къ сокращенію вычисленій. Въ нижеслѣдующихъ примѣрахъ указаны главные типы такихъ упрощеній.

I. Если одинъ изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ имѣетъ общаго множителя со свободнымъ членомъ, то всегда возможно нѣкоторое упрощеніе.

Пусть дано, напр., уравненіе:

$$15x+17y=40. \qquad (1).$$

Раздѣливъ ур-іе на общаго множителя чиселъ 15 и 40, т. е. на 5, получаемъ:

$$3x+\frac{17}{5}y=8.$$

Такъ какъ $3x$ и 8 суть числа цѣлыя, то $17y$ должно дѣлиться на 5; но 17 на 5 не дѣлится, слѣд., $\frac{y}{5}$ должно быть цѣлымъ числомъ. Обозначимъ это цѣлое число буквой y_1, такъ что $y=5y_1$, и данное уравненіе принимаетъ болѣе простой видъ:

$$3x+17y_1=8. \qquad (2)$$

Такъ какъ коэффиціентъ при x невеликъ, то рѣшаемъ это уравненіе по первому способу (§ 202). Находимъ:

$$x=\frac{8-17y_1}{3}.$$

Подставляя вмѣсто y_1 значенія 0, 1, 2, имѣемъ:

При $y_1=0$; $x=\frac{8}{3}$, число нецѣлое;

$y_1=1$; $x=-\frac{9}{3}=-3$, число цѣлое.

Итакъ, одно изъ рѣшеній ур-ія (2) будетъ:

$$y_1=1;\ x=-3.$$

Слѣд., одно изъ рѣшеній ур-ія (1) есть:

$$y=5y_1=5;\ \ x=-3,$$

а потому всѣ рѣшенія ур-ія (1) суть:

$$x=-3+17t;\ y=5-15t.$$

II. Положимъ, дано уравненіе:

$$7y-11x=31. \qquad (1).$$

Рѣшая его, находимъ:

$$y=\frac{31+11x}{7}=4+x+\frac{3+4x}{7}.$$

Полагая

$$\frac{3+4x}{7}=t,$$

находимъ:

$$4x-7t=-3, \qquad (2)$$

откуда $x=\frac{7t-3}{4}=t+\frac{3t-3}{4}$.

Числитель дроби $\frac{3t-3}{4}$ имѣетъ общаго множителя 3; поэтому:

$$x=t+\frac{3(t-1)}{4}.$$

Для того, чтобы произведеніе $3(t-1)$ дѣлилось на 4, необходимо, чтобы $\frac{t-1}{4}$ равнялось цѣлому числу, напр., t_1. Тогда $\frac{t-1}{4}=t_1$, откуда $t=4t_1+1$.

Положивъ здѣсь $t_1=0$, получаемъ $t=1$; слѣд., изъ уравненія (2) находимъ $x=1$, а подставивъ это значеніе x въ уравненіе (1), опредѣляемъ $y=6$.

Итакъ, общія формулы будутъ:

$$x=1+7t;\ y=6+11t.$$

III. Однимъ изъ полезнѣйшихъ средствъ для упрощенія вычисленій является *введеніе отрицательныхъ остатковъ*.

Положимъ, напримѣръ, дано уравненіе:

$$7x+13y=72.$$

Опредѣляя x, находимъ:

$$x=\frac{72-13y}{7}.$$

При выдѣленіи цѣлой алгебраической части изъ дроби $\frac{72-13y}{7}$, мы можемъ или взять:

$$\frac{72-13y}{7}=10-y+\frac{2-6y}{7},\ \text{или же:}$$

$$\frac{72-13y}{7}=10-2y+\frac{2+y}{7}.$$

Очевидно, что во второмъ случаѣ дальнѣйшее вычисленіе будетъ проще, ибо полагая

$$\frac{2+y}{7}=t,$$

получаемъ сразу уравненіе:

$$y=7t-2,$$

въ которомъ одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ единицѣ.

Примѣры. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленныя уравненія:

I. $7x+13y=91$. *Отв.* $x=13-13t$; $y=7t$.

II. $ax+by=ab$. Всегда ли возможно рѣшить это уравненіе въ цѣлыхъ числахъ? *Отв.* Да, всегда.

III. $19x-17y=35$. *Отв.* $x=-8+17t$; $y=-11+19t$.

IV. $6x-15y=63$. *Отв.* $x=8+5t$; $y=-1+2t$.

V. $18x+21y=22$. *Отв.* Задача невозможная (§ 200).

213. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ.

Разсмотримъ два случая.

1°. Коэффиціенты при x и y имѣютъ **различные знаки,** такъ что уравненіе имѣетъ видъ:

$$ax-by=c,$$

гдѣ a и b суть числа положительныя.

Въ этомъ случаѣ неопредѣленное уравненіе имѣетъ **неограниченное число системъ цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній.**

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ цѣлыя рѣшенія въ этомъ случаѣ заключаются въ формулахъ:

$$x=\alpha+bt;\ y=\beta+at.$$

Для того, чтобы x и y были положительны, необходимо и достаточно, чтобы t удовлетворяло неравенствамъ:

$$\alpha+bt\geqslant 0;\ \beta+at\geqslant 0.$$

Неравенства эти даютъ:

$$t\geqslant-\frac{\alpha}{b};\ t\geqslant-\frac{\beta}{a}.$$

Для того, чтобы удовлетворить сразу этимъ обоимъ неравенствамъ, достаточно брать для t значенія, не меньшія, чѣмъ большее изъ двухъ чиселъ:

$$\left(-\frac{\alpha}{b}\right) \text{ и } \left(-\frac{\beta}{a}\right),$$

такъ что **для t получается всего только одинъ предѣлъ.**

Очевидно, что можно найти для t безчисленное множество цѣлыхъ значеній, удовлетворяющихъ этому условію.

2°. Коэффиціенты при x и y имѣютъ **одинаковые знаки,** т. е. уравненіе имѣетъ видъ:

$$ax+by=c,$$

гдѣ a и b суть положительныя числа.

Очевидно, что при отрицательномъ c уравненіе не можетъ имѣть *ни одной системы* **положительныхъ** *рѣшеній.*

Если же c есть число положительное, *то уравненіе это имѣетъ* **ограниченное число положительныхъ системъ рѣшеній**, которое иногда можетъ приводиться и къ нулю *).

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ всѣ цѣлыя рѣшенія заключаются въ формулахъ:

$$x=\alpha+bt;\ y=\beta-at,$$

и слѣд., t должно удовлетворять неравенствамъ:

$$\alpha+bt\geqslant 0;\ \beta-at\geqslant 0,$$

откуда

$$t\geqslant -\frac{\alpha}{b};\ t\leqslant\frac{\beta}{a}.$$

Если $\frac{\beta}{a}$ будетъ менѣе числа $\left(-\frac{\alpha}{b}\right)$, то ясно, что эти два неравенства **несовмѣстны**, и уравненіе не будетъ имѣть *ни одной системы цѣлыхъ* и положительныхъ рѣшеній.

Если же $\frac{\beta}{a}$ будетъ болѣе числа $\left(-\frac{\alpha}{b}\right)$, то неравенства эти будутъ удовлетворены для всѣхъ цѣлыхъ значеній t, находящихся въ границахъ между $\left(-\frac{\alpha}{b}\right)$ и $\frac{\beta}{a}$, откуда видно, что рѣшеній этихъ можетъ быть лишь **ограниченное число**.

214. Примѣры I. Уравненіе

$$6x-5y=21,$$

имѣетъ цѣлыя рѣшенія, заключенныя въ формулахъ:

$$x=1+5t;\ y=-3+6t.$$

Для того, чтобы рѣшенія были положительны, необходимо и достаточно, чтобы:

$$1+5t\geqslant 0 \text{ и } -3+6t\geqslant 0,$$

откуда

$$t\geqslant -\frac{1}{5} \text{ и } t\geqslant\frac{1}{2}.$$

Такъ какъ неравенства эти **однозначны**, то, очевидно, что всѣ значенія t, бо̀льшія бо̀льшаго изъ предѣловъ

***) Послѣдній случай имѣетъ мѣсто, напримѣръ, тогда, если c не равно нулю и менѣе каждаго изъ коэффиціентовъ a и b.**

$\left(\text{въ данномъ случаѣ } \frac{1}{2}\right)$, будутъ удовлетворять обоимъ неравенствамъ сразу. Итакъ, t можетъ принимать значенія:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\ .\ .\ .\ .\ \infty,$$

а потому заданное уравненіе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній. Этого результата и надо было ждать, такъ какъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ имѣютъ различные знаки.

II. Дано неопредѣленное уравненіе:

$$5x+8y=37.$$

Всѣ цѣлыя рѣшенія этого ур-ія заключаются въ формулахъ:

$$x=9-8t;\ y=-1+5t.$$

Для того, чтобы корни эти были положительны, t должно удовлетворять неравенствамъ:

$$9-8t \geqslant 0 \text{ и } -1+5t \geqslant 0,$$

откуда $$t \leqslant \frac{9}{8} \text{ и } t \geqslant \frac{1}{5}.$$

Между числами $\frac{9}{8}$ и $\frac{1}{5}$ заключается всего одно цѣлое число 1, а потому **единственное** возможное значеніе для t будетъ $t=1$, что даетъ значенія корней: $x=1$, $y=4$.

III. Дано неопредѣленное уравненіе:

$$2x+5y=3.$$

Всѣ цѣлыя рѣшенія этого уравненія заключаются въ формулахъ:

$$x=-1+5t;\ y=1-2t.$$

Для того, чтобы корни эти были положительны, необходимо, чтобы

$$-1+5t \geqslant 0 \text{ и } 1-2t \geqslant 0,$$

откуда $$t \geqslant \frac{1}{5} \text{ и } t \leqslant \frac{1}{2}.$$

Такъ какъ между дробями $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{5}$ не заключено ни одного цѣлаго числа, то предложенное уравненіе *вовсе не имѣетъ положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній.* Это видно и изъ самой формы уравненія, такъ какъ въ немъ сумма коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ болѣе свободнаго члена, и ни одинъ изъ нихъ не равенъ свободному члену.

215. Нахожденіе одной пары цѣлыхъ рѣшеній при помощи непрерывныхъ дробей.

А. Разсмотримъ сперва случай, когда оба коэффиціента при неизвѣстныхъ имѣютъ одинаковые знаки, т. е., если уравненіе имѣетъ видъ:

$$ax+by=c, \tag{1}$$

гдѣ a и b суть числа положительныя и притомъ, конечно, взаимно простыя.

Обратимъ дробь $\frac{a}{b}$ въ непрерывную и составимъ рядъ подходящихъ дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \frac{P_n}{Q_n}.$$

Послѣдняя подходящая $\frac{P_n}{Q_n}$ равна точному значенію непрерывной дроби, т. е. $\frac{a}{b}$.

Напишемъ разность (§ 106):

$$\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{bQ_{n-1}},$$

или $$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=(-1)^n. \tag{2}$$

Здѣсь могутъ имѣть мѣсто два случая:

1. Послѣдняя подходящая дробь $\frac{a}{b}$ есть дробь четнаго порядка, т. е. n есть число четное.

Въ этомъ случаѣ послѣднее равенство перепишется такъ:

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=1,$$

или, умножая обѣ части на c:

$$acQ_{n-1}-bcP_{n-1}=c.$$

Сравнивая это тождество съ заданнымъ уравненіемъ

$$ax+by=c,$$

видимъ, что послѣднее удовлетворяется слѣдующими значеніями неизвѣстныхъ:

$$x=c\,.\,Q_{n-1};\ y=-c\,.\,P_{n-1}.$$

Слѣд., одна система рѣшеній даннаго уравненія найдена.

2. Если послѣдняя подходящая $\frac{a}{b}$ есть дробь нечетнаго порядка, то равенство (2) даетъ:

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=-1,$$

или, умноживъ обѣ части на $(-c)$:

$$-acQ_{n-1}+bcP_{n-1}=c.$$

Сравнивая послѣднее тождество съ заданнымъ уравненіемъ (1), видимъ, что одна изъ системъ рѣшеній въ этомъ случаѣ будетъ:

$$x=-c\,.\,Q_{n-1};\ y=c\,.\,P_{n-1}.$$

B. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда коэффиціенты при неизвѣстныхъ имѣютъ различные знаки, т. е., когда уравненіе имѣетъ видъ:

$$ax-by=c. \qquad (3).$$

Поступая такъ же, какъ въ предыдущемъ случаѣ, разлагаемъ $\frac{a}{b}$ въ непрерывную дробь, составляемъ рядъ подходящихъ дробей и пишемъ равенство (2):

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=(-1)^n.$$

1. Въ случаѣ четнаго n, имѣемъ:

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=1,$$

откуда, умножая обѣ части на c, и сравнивая получаемое тождество:

$$acQ_{n-1}-bcP_{n-1}=c$$

съ заданнымъ уравненіемъ (3), видимъ, что одна изъ системъ рѣшеній будетъ:

$$x=c\,.\,Q_{n-1};\ y=c\,.\,P_{n-1}.$$

2. Въ случаѣ же нечетнаго n имѣемъ:

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=-1,$$

откуда, умножая обѣ части на $(-c)$ и сравнивая получаемое тождество:

$$-acQ_{n-1}+bcP_{n-1}=c$$

съ заданнымъ уравненіемъ (3), видимъ, что одна изъ системъ рѣшенія будетъ:

$$x=-c\,.\,Q_{n-1};\ y=-c\,.\,P_{n-1}.$$

216. Примѣры. При помощи непрерывныхъ дробей найти одну систему цѣлыхъ рѣшеній слѣдующихъ неопредѣленныхъ уравненій:

I. $12x-7y=15$.

Разлагая $\frac{12}{7}$ въ непрерывную дробь, получаемъ:

$$\frac{12}{7}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}.$$

Составляемъ подходящія:

$$\text{I. } 1;\ \text{II. } 2;\ \text{III. } \frac{5}{3};\ \text{IV. } \frac{12}{7}.$$

Составляемъ разность:

$$\frac{12}{7}-\frac{5}{3}=\frac{1}{7\,.\,3},$$

откуда $$3\,.\,12-5\,.\,7=1.$$

Умножая обѣ части послѣдняго равенства на 15 и сравнивая получаемое тождество:

$$12\,.\,45-7\,.\,75=15,$$

съ предложеннымъ уравненіемъ, видимъ, что одна система рѣшеній будетъ:

$$x=45;\ y=75.$$

II. $62x+27y=5$.

Разложеніе дроби $\frac{62}{27}$ въ непрерывную даетъ:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}.$$

Подходящія дроби будутъ:

$$\text{I. } 2;\ \text{II. } \frac{7}{3};\ \text{III. } \frac{16}{7};\ \text{IV. } \frac{23}{10};\ \text{V. } \frac{62}{27}.$$

Пишемъ разность:

$$\frac{62}{27}-\frac{23}{10}=-\frac{1}{27.10}, \text{ откуда}$$

$$62\ .\ 10-23\ .\ 27=-1.$$

Умножая обѣ части на (-5), и сравнивая получаемое тождество:

$$62\ .\ (-50)+27\ .\ 115=5$$

съ заданнымъ уравненіемъ, видимъ, что одна изъ системъ цѣлыхъ рѣшеній предложеннаго уравненія будетъ: $x=-50$; $y=115$.

III. $29x+17y=12$. *Отв.* $x=-84$; $y=144$.

IV. $37x-15y=22$. *Отв.* $x=-44$; $y=-110$.

V. $91x+14y=351$. *Отв.* Задача невозможна.

Конецъ.

Обращаюсь ко всѣмъ, пользующимся моими книгами, съ покорнѣйшей просьбой: сообщать мнѣ обо всѣхъ измѣненіяхъ, улучшеніяхъ и дополненіяхъ, желательныхъ въ послѣдующихъ изданіяхъ.

Кромѣ того, обращаюсь ко всѣмъ учащимся еще съ одной просьбой: сообщать мнѣ послѣ экзаменовъ задачи (билеты), предложенныя имъ на вступительныхъ экзаменахъ въ спец. уч. зав., съ указаніемъ, въ какомъ Институтѣ и въ какомъ году данная задача (или билетъ) была предложена. Сдѣлать это можно открытымъ письмомъ, адресуя: Петроградъ, Ивановская, 6, или же лично. Всѣ сообщаемые мнѣ вопросы будутъ помѣщены въ послѣдующихъ изданіяхъ моихъ „*Сборниковъ задачъ, предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ*“.

Равнымъ образомъ очень прошу учащихся присылать мнѣ немедленно послѣ окончанія выпускныхъ письменныхъ экзаменовъ въ средней школѣ условія задачъ по всѣмъ отдѣламъ (съ числовыми данными). Не слѣдуетъ при этомъ упускать изъ виду, что надо указать, гдѣ именно эта задача была предложена.

Тип. „Двигатель“, Казначейская, 6.